

# **SEMINÁRIOS**

**do**

**NÚCLEO INTERDISCIPLINAR DE  
PESQUISA, ENSINO, DIDÁTICA DAS  
CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E  
TECNOLOGIAS**

**V.2, N.1- NOV/2017**



ANAIS do

# **SEMINÁRIO DO NIPEDICMT**

Salvador, V.2, N.1- nov/2017

*João Carlos Salles Pires da Silva*

**REITOR**

*Paulo César Miguez de Oliveira*

**VICE-REITOR**

*Fabiana Dultra Britto*

**PRÓ-REITORA DE EXTENSÃO**

*Messias Guimarães Bandeira*

**DIRETOR DO INSTITUTO DE HUMANIDADES , ARTES E CIÊNCIAS**

**PROMOTORES**

Universidade Federal da Bahia

Universidade Estadual Feira de Santana

Programa de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências (UFBA/UEFS)

Núcleo Interdisciplinar de Pesquisa, Ensino, Didática das Ciências, Matemática e Tecnologias  
(NIPEDCMT)

**Publicação de caráter semestral que divulga as pesquisas desenvolvidas.**

**REVISÃO DE ORIGINAIS E PROVAS**

*Eliane Santana de Souza*

*Anderson Souza Neves*

## **AGRADECIMENTOS**

A comissão organizadora do III Seminário do NIPEDICMT e a todos que de alguma maneira colaboraram para realização deste evento, em especial professor Edmo Fernandes carvalho, professor Luiz Marcio Santos Farias e professora Eliane Santana de Souza.

À Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana pela disposição de co-promover o evento.

Ao Programa de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela disposição de sediar o evento.

Aos servidores da Universidade Federal da Bahia por contribuir nos procedimentos institucionais para a realização do evento.

## **PROMOÇÃO**

Universidade Federal da Bahia  
Programa de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências  
(UFBA/UEFS)  
Núcleo Interdisciplinar de Pesquisa, Ensino, Didática das Ciências, Matemática e  
Tecnologias (NIPEDCMT)

### **CORPO EDITORIAL**

*Anderson Souza Neves (UFBA/SEC-BA)*  
*Edmo Fernandes Carvalho (UFBA/SEC-BA)*  
*Eliane Santana de Souza (UEFS/UFBA) – Brasil*  
*Luiz Marcio Santos Farias (UFBA)*

### **COMITÊ EDITORIAL**

*Amanda Lisboa Moreno Pires (UFBA-BA) – Brasil*  
*Anete Otilia Cardoso de Santana Cruz (IFBA) – Brasil*  
*Bartira Fernandes Teixeira (IFBA) – Brasil*  
*Edmo Fernandes Carvalho (UEFS/UFBA) – Brasil*  
*Eliane Santana de Souza (UEFS/UFBA) – Brasil*  
*Jany Santos Souza Goulart (UEFS/UFBA) – Brasil*  
*José Vieira do Nascimento Júnior (UEFS) – Brasil*  
*Josélia França de Holanda Cavalcanti (IFBA/UFBA) – Brasil*  
*Luiz Marcio Santos Farias (UFBA) - Brasil*  
*Melina Silva de Lima (SENAI - CIMATEC) – Brasil*  
*Osnildo Andrade Carvalho (IFBA) – Brasil*

**PROJETO GRÁFICO, EDITORAÇÃO ELETRÔNICA E CAPA**

*Anderson Souza Neves*

*Eliane Santana de Souza*

**UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA**

**EDUFBA – EDITORA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA**

Rua Barão de Jeremoabo s/n – Campus de Ondina

CEP: 40.170 -115 Salvador – Bahia – Brasil

Telefone: +55 (71) 3283-6160

Fax: +55 (71) 3283-6164





## Sumário

<b>EDITORIAL .....</b>	<b>10</b>
<b>UM RETRATO DE TRAÇOS HISTÓRICOS E PARADIGMÁTICOS E SUAS INTERLIGAÇÕES COM O CURRÍCULO PARA O ENSINO DOS PRODUTOS ENTRE VETORES.....</b>	<b>12</b>
<i>Jany Santos Souza Goulart .....</i>	<i>12</i>
<b>RAZÕES DE SER PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES: ELEMENTOS DE SUA INSTITUCIONALIZAÇÃO ENQUANTO SABER A SER ENSINADO .....</b>	<b>24</b>
<i>Edmo Fernandes Carvalho .....</i>	<i>24</i>
<b>CONTRIBUIÇÕES HISTÓRICAS E FILOSÓFICAS PARA COMPREENSÃO DA EVOLUÇÃO DO CONCEITO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO.....</b>	<b>37</b>
<i>Eliane Santana de Souza .....</i>	<i>37</i>
<b>UMA ANÁLISE DAS DIMENSÕES ECONÔMICA E ECOLÓGICA DO ENSINO DE MATEMÁTICA PARA CRIANÇAS SURDAS E OS PROBLEMAS DA APRENDIZAGEM CENTRADOS NA DIFERENÇA ENTRE A LÍNGUA MATERNA E A LÍNGUA ESCOLAR. ....</b>	<b>52</b>
<i>Bartira Fernandes Teixeira .....</i>	<i>52</i>
<b>ASPECTOS HISTÓRICO-EPITEMOLÓGICOS O CONCEITO DE LIMITES NO ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL .....</b>	<b>62</b>
<i>Osnildo Andrade Carvalho .....</i>	<i>62</i>



## EDITORIAL

Este é o primeiro número do volume 2 da revista Seminário do NIPEDICMT (v. 2, n. 1), relativo ao ano de 2017. Neste fascículo damos mais um passo no processo de construção e difusão da revista. Neste primeiro número do volume 2 publicamos 5 artigos, sendo que todos eles possuem como foco comum de estudo e discussão as **Contribuições da Filosofia e História das Ciências para as pesquisas em Didática das Ciências e matemática.**

O primeiro artigo foi escrito por Jany Santos Souza Goulart Carvalho e tem por título UM RETRATO DE TRAÇOS HISTÓRICOS E PARADIGMÁTICOS E SUAS INTERLIGAÇÕES COM O CURRÍCULO PARA O ENSINO DOS PRODUTOS ENTRE VETORES. Neste trabalho, a autora analisa alguns elementos que revelam contornos históricos dos produtos escalar, vetorial e misto que emergiram a partir da tentativa de ampliação do ambiente complexo para o espaço euclidiano tridimensional por meio dos estudos de Hamilton no século XIX, dando origem aos *Quaténions*.

O segundo artigo, de autoria de Edmo Fernandes Carvalho, e tem como título RAZÕES DE SER PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES: ELEMENTOS DE SUA INSTITUCIONALIZAÇÃO ENQUANTO SABER A SER ENSINADO. Discute-se nesse artigo o problema didático da compreensão do conceito global de função como consequência da construção do pensamento algébrico, fruto de uma atividade matemática cuja razão de ser tem indícios de questões extra matemáticas.

O terceiro artigo, de autoria de Eliane Santana de Souza, tem por título CONTRIBUIÇÕES HISTÓRICAS E FILOSÓFICAS PARA COMPREENSÃO DA EVOLUÇÃO DO CONCEITO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO. Neste trabalho, busca-se na história e filosofia subsídios para compreendermos o processo evolutivo das funções seno e cosseno, e detectar, caso exista, possíveis incompletudes que venham influenciar no ensino atual dessas funções.

O próximo artigo, denominado INTERCULTURALISMO: UMA ANÁLISE DAS DIMENSÕES ECONÔMICA E ECOLÓGICA DO ENSINO DE MATEMÁTICA BILÍNGUE E OS PROBLEMAS DA APRENDIZAGEM CENTRADOS NA DIFERENÇA ENTRE A LÍNGUA MATERNA E A LÍNGUA ESCOLAR, de autoria de Bartira Fernandes Teixeira, discute-se o ensino bilíngue da Matemática a partir da análise de duas das dimensões (econômica e ecológica) do problema didático aqui posto, qual seja, a construção da noção de número pelas crianças surdas. Trazendo contribuições

da História e da Filosofia das Ciências para esta pesquisa, a partir de um viés interculturalista.

O artigo que fecha este número da revista foi escrito por Osnildo Carvalho, tem por título ASPECTOS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICOS DO CONCEITO DE LIMITES NO ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. Neste artigo, o autor apresenta uma revisão bibliográfica dos aspectos histórico-epistemológicos do conceito de limites de uma função de uma variável real, evidenciando os obstáculos epistemológicos e didáticos. Tal ação visa promover a aproximação entre a didática da matemática e a história e filosofia do cálculo e mostrar os pensamentos dos matemáticos que contribuíram para o seu desenvolvimento.

Salvador, novembro de 2017.

Luiz Márcio Santos Farias (Editor chefe)

Anderson Souza Neves (Editor associado)

Eliane Santana de Souza Oliveira (Editora associada)



Núcleo Interdisciplinar de Pesquisa, Ensino e Didática das Ciências, Matemática e Tecnologia

III SEMINÁRIO DO NIPEDICMT  
CONTRIBUIÇÕES DA FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS PARA AS  
PESQUISAS EM DIDÁTICA DAS CIÊNCIAS

**UM RETRATO DE TRAÇOS HISTÓRICOS E PARADIGMÁTICOS E SUAS  
INTERLIGAÇÕES COM O CURRÍCULO PARA O ENSINO DOS PRODUTOS  
ENTRE VETORES.**

*Jany Santos Souza Goulart<sup>1</sup>*

**Resumo**

Neste texto apresentamos alguns elementos que revelam contornos históricos dos produtos escalar, vetorial e misto que emergiram a partir da tentativa de ampliação do ambiente complexo para o espaço euclidiano tridimensional por meio dos estudos de Hamilton no século XIX, dando origem aos *Quaténions*. Contudo a ausência da propriedade comutativa na *álgebra dos Quarténios* gerou críticas que contribuíram para manifestação de um cenário controverso. No entanto, ao direcionar nossa atenção para o que está posto nos Cursos de Licenciatura em Matemática sobre a álgebra vetorial, detectamos que os documentos de referência utilizam uma estratégia pragmática da definição e posterior apresentação das propriedades decorrentes dela, suprimindo as razões que levaram a tais definições. A partir desta constatação, inferimos que o Modelo Epistemológico Dominante - MED está eivado de traços do paradigma dominante e consequentemente se reflete nas concepções que futuros professores, discentes de um Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS, evidenciaram ao responderem uma questão acerca do saber de referência. As respostas apontaram que prevalece entre os discentes uma concepção matemática pautada no paradigma positivista que valoriza a exatidão, a qual também predomina em seu processo de formação, já que a configuração institucional dos Cursos de Licenciatura em Matemática não favorece que a propensão de discussões interdisciplinares aflorem no solo destes cursos e gerem questões norteadoras na produção e condução de respostas que desencadeiem e contemplem produção de conhecimento como preconizado por meio do Paradigma de Questionamento do Mundo de Chevallard (2012).

**Palavras-chave:** Produto entre vetores, Paradigma, Licenciatura em Matemática.

---

<sup>1</sup> Professora Assistente B do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS, Mestre em Desenho, Cultura e Interatividade pela UEFS, Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino Filosofia e História das Ciências – UFBA/UEFS, e-mail:jany.uefs@gmail.com

## Um retrato da Álgebra Vetorial imersa em cursos de Geometria Analítica.

As grandezas vetoriais são protagonistas em cursos vinculados as ciências exatas e tecnológicas, geralmente compõem a ementa de disciplinas em que o cerne é a Geometria Analítica e adquire um formato sequencial e recorrente nas componentes ligadas a álgebra linear, física e cálculo. No ensino médio e nos cursos básicos universitários, o primeiro contato com os vetores reporta a uma representação em que os vetores são associados as grandezas que necessitam de módulo, direção e sentido para serem plenamente caracterizadas como em exemplos clássicos de deslocamento, velocidade, aceleração e força dentre outros.

Neste primeiro momento, um vetor é geometricamente representado por um segmento orientado, o que situa o mesmo na esfera intuitiva. Gradualmente, segue-se com a operação de adição (soma de vetores) e a multiplicação de um vetor por um escalar (número real). Operações estas vinculadas ao âmbito geométrico intuitivo, uma vez que a primeira recorre às regras do paralelogramo ou polígono.

Enquanto a segunda gera representantes de vetores que alteram as características do vetor inicialmente dado, tais como o aumento do comprimento ao considerar um escalar menor que -1 ou maior que 1 ou diminuição do comprimento do segmento orientado quando o número pertence ao intervalo aberto delimitado por -1 e 1, mante-se o comprimento quando os escalares forem iguais -1 ou 1 e obtém-se a inversão do sentido ao considerar um número negativo. Fato este, exemplificado por meio da nota de aula de um docente.

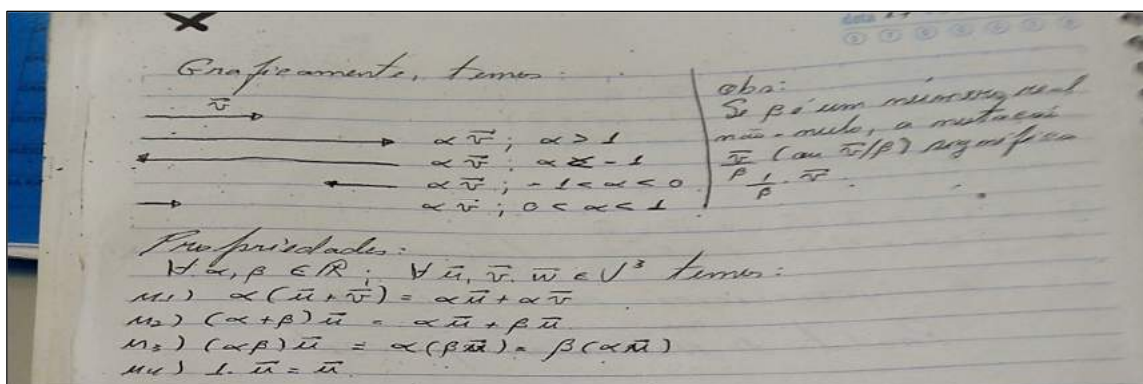


Figura 1: Anotações de docente da disciplina Geometria Analítica e Álgebra Linear I (EXA – 180)

A partir destes conceitos prévios, avança-se para as operações que envolvem “produto entre vetores”, ou seja, os produtos escalar, vetorial e misto. Apresentamos as definições de um dos livros textos que integram as referências bibliográficas que compõem as ementas e planos de ensino da referida componente curricular.

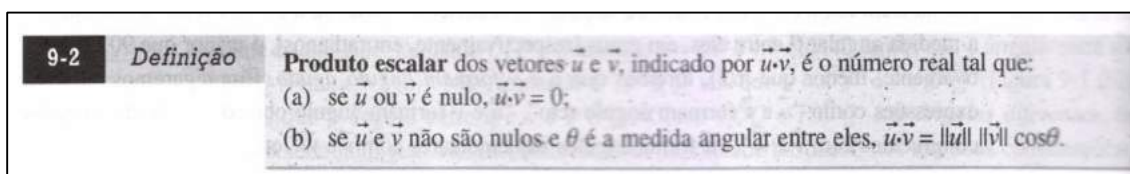


Figura 2: definição do produto escalar (BOULOS, 2005, p. 72)

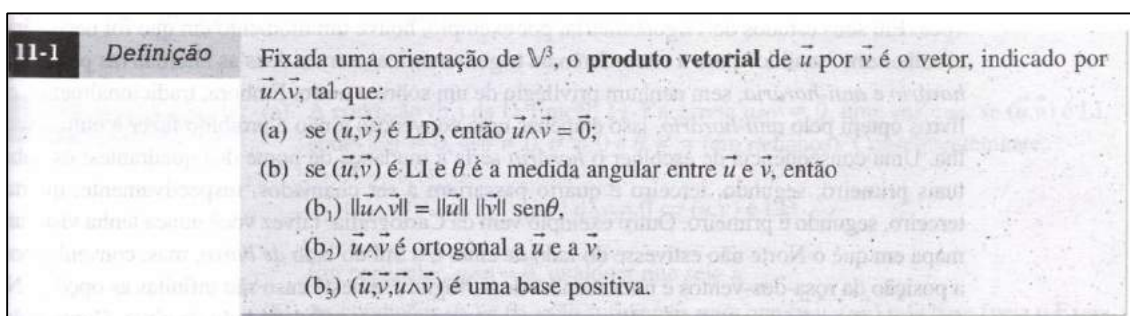


Figura 3: definição produto vetorial (BOULOS, 2005, p. 99)

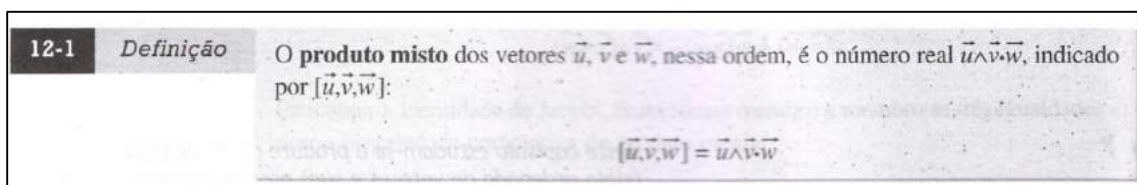


Figura 4: definição produto misto (BOULOS, 2005, p. 122)

Os livros textos que abordam o assunto utilizam a estratégia pragmática da definição e posterior apresentação das propriedades decorrentes da definição, suprimindo às razões que levaram a tais definições. Fato este, que repercute nas salas de aulas de Geometria Analítica e pode constituir um dos entraves no processo de aprendizagem.

Com base neste esboço, inferimos a existência de elementos que enfraquecem e provocam ausência da *razão de ser*<sup>2</sup> da álgebra vetorial, visto que segundo Chevallard (2012) a funcionalidade do saber responde as razões de ser, dá sentido ao estudo do

<sup>2</sup> Verifica se razão de ser dos tipos de tarefas estão sustentadas pelo discurso didático tecnológico – teórico capaz de descrever, justificar, interpretar e desenvolver a práxis.

mesmo. Chevallard (2012) também ressalta que quando um objeto do saber é abordado como um monumento que se mantém por conta própria, aos alunos restam admirar e desfrutar, mesmo quando não sabem quase nada sobre suas razões de ser, de agora ou no passado, assim cumprem aos alunos assumirem a posição de meros espectadores.

Com estas aspirações e um olhar microdidático, direcionamos a atenção para a disciplina “Geometria Analítica e Álgebra Linear I (EXA 180)” por se tratar, supostamente, do primeiro contato que o discente terá com a geometria após ter ingressado na graduação. No que tange ao conteúdo, fazemos referência à álgebra vetorial por transportar em si elementos e conceitos que perpassam por toda a Geometria Analítica, além de constituir base para disciplinas como “Física I (FIS 619)” e “Física II (FIS 620)”, além do “Cálculo Integral de Funções de Várias Variáveis (EXA 219)” que, em seus desdobramentos, dissertam sobre objetos matemáticos como “vetor gradiente”, “vetor rotacional” dentre outros.

### **Articulações entre a TAD e um recorte do contexto histórico e epistemológico do Produto entre Vetores.**

Ao revisitar a trajetória histórica e epistemológica traçada pelo processo evolutivo do conhecimento que envolveu o tratamento vetorial, surgem aspectos que tornam evidente a existência de variadas maneiras de organizar e instituir este saber. Contudo, foi a partir do século XIX que figuraram relevantes estudos que abrangem o que denominamos hoje de vetores. Como amostra deste fato, podemos elencar a invenção dos *Quatérnions* em 1843 protagonizada por William Rowan Hamilton por meio da obra *Elements of quaternions*. Criação está que teve sua gênese associada a representação geométrica dos números complexos como destacou Silva (2002):

Hamilton analisou o modo de representar o plano dos números complexos usando pares reais. Um número complexo  $x + yi$  com  $x, y$  reais pode ser representado por um ponto  $P$  de coordenadas  $(x,y)$  no plano. Neste caso, o número imaginário  $i = -1$  representa uma direção perpendicular à reta dos números reais. Seria possível desenvolver um formalismo mais geral para o espaço tridimensional? A situação análoga em três dimensões poderia ser a correspondência entre vetores no espaço e os “tripletos” – certos números contendo uma parte real e duas partes imaginárias. Essa analogia mostrou-se infrutífera, mas Hamilton insistiu em sua possibilidade por anos, até pensar na possibilidade de quartetos, os quatérnions. (SILVA, 2002, p.55)

No entanto, os estudos de Hamilton foram contestados no final do século XIX, na década de 1890 em que a revista *Nature* foi o cenário da disputa entre dois sistemas



matemáticos os quais envolviam teorias vetoriais. Silva (2002) sintetiza a controvérsia ao expor que:

De um lado estão os defensores dos quatérnions dentro da tradição pura de Hamilton e de outro os defensores de novos sistemas mais simples, entre os quais estão Gibbs e Heaviside. Estes últimos negam qualquer influência dos quatérnions sobre seu sistema, durante o debate, e afirmam que os quatérnions são totalmente dispensáveis. (SILVA, 2002, p.57)

Neste direcionamento, torna-se evidente a relevância de não tão somente visitar obras, termo empreendido por Chevallard, mas também buscar compreender os aspectos controversos e contradições que estruturaram o que temos institucionalizado na contemporaneidade acerca dos vetores. Além de evidenciar as relações pessoais e institucionais com objetos que abarcam o tratamento vetorial. A TAD nos fornece elementos que possibilitam uma análise das condições e restrições na divulgação praxeológica dos vetores, neste caso situamos as disputas científicas no âmbito de condições e restrições situada na escala civilizatória científica.

A partir destas premissas ergue-se outro pilar de sustentação teórica que subsidiará nossos estudos, a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Yves Chevallard (1999), que aflorou como um prolongamento da Teoria da Transposição Didática<sup>3</sup>, propiciando uma ampliação dos ecossistemas<sup>4</sup> e das inter-relações entre objetos de ensino e indivíduos membros de certa instituição. A partir desta estrutura primeira, Chevallard (1999) tomou como base três conceitos primitivos: os objetos “O”, as pessoas “X” e as instituições “I”, sublinhando a condição de existência que tudo é objeto, conseqüentemente os objetos “O” passam a ocupar uma posição privilegiada em detrimento dos outros conceitos, constituindo “material de base” da construção teórica.

Contudo, a condição de existência de todo objeto estará condicionada ao reconhecimento do mesmo, ou seja, ele passará a existir no momento em que for reconhecido por uma pessoa X ou instituição I. Com isso, aparecerão as relações pessoal e institucional denotada por  $R(X,O)$  e  $R(I,O)$ , respectivamente que torna evidente os aspectos de interdependências entre esses elementos.

Do ponto de vista da «semântica» da teoria, qualquer coisa pode ser um objeto. Um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como existente (para ela). Mais precisamente, podemos dizer que o objeto O existe para X (respectivamente, para I) se existir um objeto, que

---

<sup>3</sup> Ver Chevallard 1991.

<sup>4</sup> Entendemos ecossistema como sendo o local onde se desenvolve um determinado sistema que possui uma ecologia própria, no caso em estudo, o sistema didático.

denotarei por  $R(X, O)$ , a que chamarei de relação pessoal de X com O (resp. relação institucional de I com O) (CHEVALLARD, 1998, p 93)

Indagamos então, quais parâmetros sustentam as condições de existência dos vetores na instituição Geometria Analítica pertencente ao Curso de Licenciatura em Matemática?

Ao usar as lentes da TAD, emerge um dos pilares que considera a inseparabilidade e interdependências entre os blocos práticos e teóricos intrínsecos às atividades matemáticas, no qual está inserido os objetos vetores, permitindo o estudo da gênese e consequentemente das condições de existências das Organizações Matemáticas (OM) ou Organizações Praxeológicas Matemáticas (OPM) em ambientes educacionais (salas de aulas).

Com base nestes pressupostos, o cerne do nosso estudo encontra sustentação nos princípios teóricos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) ao considerar como contribuição relevante o papel das instituições nas análises de fenômenos didáticos (CHEVALLARD, 1999), assim como nas estruturações praxeológica<sup>5</sup> vinculada as atividades matemática. Neste preambulo destacamos três instituições: a Álgebra Vetorial (AV), as salas de aula de Geometria Analítica e Álgebra Linear I (EXA 180) e o Curso de Licenciatura em Matemática da UEFS, com base nestes elementos objetivamos imergir nestas instituições para compor o desenho do escopo estrutural no qual o objeto álgebra vetorial reside.

Seguindo a concepção chevallardiana ao admitir que todas as atividades matemáticas são em primeira instância atividades humanas institucionalizadas que se assentam em ações as quais desencadeiam um pensar, ou seja um saber fazer que geram “artefatos” ou “obras”, constituídos institucionalmente, cuja reconstrução<sup>6</sup> em determinada instituição, por exemplo em uma classe torna-se um objeto de ensino (CHEVALLARD, 1999) subsidiado por como fazer? E a *razão de ser* deste fazer? Ou seja, por que e para que estudar vetores? De acordo com Chevallard (2012) a funcionalidade dos saberes responde as razões de ser, dá sentido de estudo de um saber. Quando um saber perde sentido ou quando não se conhece suas razões de ser, “o porque

---

<sup>5</sup> Modelos matemáticos organizados por uma praxis (saber fazer – tarefas/técnicas) justificado pelo logos (saber – tecnologia/teoria)

<sup>6</sup> Consideramos no sentido da Transposição Didática de Chevallard (1991)

e para que”, seu estudo se reduz a uma mecanização e memorização que só imita uma aprendizagem.

A partir deste esboço teórico, retornemos a nossa atenção para o campo vetorial presentes nas salas de aulas de geometria analítica e conseqüentemente na trajetória formativa dos futuros professores de matemática atreladas a questionamentos e interpretações provocadas pelo Modelo Epistemológico Dominante (MED) (FARRAS; BOSCH; GASCÓN, 2013). Neste modelo, objetiva-se verificar o que está posto e se as vozes dos documentos oficiais ecoam as especificidades dos saberes matemáticos vetoriais.

Neste primeiro momento não nos debruçaremos sobre o MED por completo, atentaremos para Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática (CNE/CES 1.302/2001) e a Resolução (CNE/CP 1/2002), que instituiu Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, a qual foi recentemente substituída pela (CNE/CP 2/2015), que trata das Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior dos cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduandos e cursos de segunda licenciatura, assim como a formação continuada.

Tomando como base os direcionamentos da (CNE/CES 1.302/2001) acerca dos conteúdos comuns a todos os cursos de Licenciatura em Matemática e ao delegar a Instituição de Ensino Superior (IES) a distribuição das componentes curriculares: Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria, Geometria Analítica, ao longo do curso, torna-se basilar atentarmos para o Projeto Político Pedagógico (PPP) da instituição na qual desenvolveremos nosso estudo.

Ao examiná-lo detectamos eixos que estruturam a organização curricular do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), os quais subdividem-se em núcleos que devem se articular ao longo de todo o processo de aquisição de conhecimentos. No eixo denominado Conhecimento Científico e Cultural que engloba o núcleo do conhecimento matemático<sup>7</sup> está inserida a componente curricular

---

<sup>7</sup> De acordo com o Projeto Político Pedagógico (PPP) do Curso de Licenciatura em Matemática da UEFS este núcleo trata do estudo específico do conhecimento matemático e deverá apresentar ao licenciando a dimensão prática deste conhecimento.

EXA 180 – Geometria Analítica e Álgebra Linear I com carga horária de 90h que contempla em sua ementa o saber Álgebra Vetorial.

Sem perder de vista os pressupostos teóricos da TAD, nesta perspectiva trata-se de instituições transpositivas em que os saberes matemáticos são “manipulados” para fins de ensino, desencadeando questionamentos de cunho ecológico, como uma forma de indagar o real: “o que existe e porquê? E o que não existe e porquê?”. Antes de adentrarmos no discurso que envolve a álgebra vetorial, nos deteremos neste texto, a apresentar o limiar de alguns elementos descritivo do MED relevando traços paradigmáticos que se encontram enraizados na gênese estrutural dos Cursos de Licenciatura de Matemática. Especificamente, supomos que o pano de fundo paradigmático contribuirá para entendermos como se desenha no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS.

### **Alguns traços da estruturação curricular dos Curso de Licenciatura em Matemática: vozes dos documentos oficiais e ecos paradigmáticos.**

Intuitivamente, quando nos indagamos sobre *o que é matemática?* Ou se pensarmos em defini-la utilizando uma única palavra? É difícil fugir de termos como: exato, números, perfeito, cálculos dentre outras concepções. Entendimentos como esses revelam traços herdados em aspirações positivistas em que o inflexível, racional e inquestionável da matemática direcionaria todas as ciências. Aspectos estes que fortalece o que Chevallard (2012) denominou de “aclamar e estudar autoridades ou obras primas” que gradualmente foi transformado em um paradigma escolar ou metaforicamente como uma visita as obras ou monumentos referentes as ramificações do conhecimento. Ao conceber desta forma, suprime-se a *razão de ser* do objeto de estudo com por exemplo:

[...] a fórmula de Heron's para o cálculo da área de um triangulo é abordada como um monumento que se mantém por conta própria, que os alunos devem admirar e desfrutar, mesmo quando não sabem quase nada sobre as razões de ser, de hoje ou do passado. (CHEVALLARD,2012,p.3)

Nestes termos, a filosofia positivista de Comte obteve expressivas aderências no Ensino de Matemática no Brasil entre os séculos XIX e XX, mesmo período este em a efervescência de pesquisas vinculadas aos vetores ganharam pujança no meio científico físico-matemático, propagadas pela aceitação em meios acadêmicos militares como por exemplo, docentes de Matemáticas e engenheiros da Academia Militar do Rio de Janeiro.

Como abordam Motta e Brolezzi (2006) ao apresentar os direcionamentos da Universidade de Coimbra que atribuía a Matemática um caráter nuclear para todos os cursos desta instituição.

Com a mesma concepção, funda-se a Academia Militar do Rio de Janeiro, em 1810, de caráter utilitarista e cientificista, tendo a Matemática como disciplina principal e voltada para as ciências experimentais, que se tornaria mais tarde uma fonte de difusão do positivismo de Comte no Brasil. (p.2)

Vale ressaltar que este relevo empreendido a matemática não se encontra em um passado distante, no qual não fazemos parte, a título de exemplificação questionamos alguns alunos do Curso de Licenciatura em Matemática do semestre de 2017.1 acerca da questão: *1) defina a matemática utilizando 1(uma) palavra*, e obtemos as seguintes respostas:

<b>Discentes</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>
<b>Respostas</b>	<b>Exatidão</b>	<b>Números</b>	<b>Universo</b>	<b>Perfeição</b>	<b>Ciência</b>	<b>Cálculo</b>

Fonte: Respostas de alguns alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da UEFS, semestre 2017.1

Ao analisarmos os documentos de referências, seja no âmbito nacional ou local as alusões ao paradigma dominante, termo empreendido por Santos (2010), manifestam-se sutilmente ou camuflados, fato este evidenciado, tanto no registro da aula do professor quanto na forma pragmática que os livros textos versam sobre a álgebra vetorial, repercutindo em condições e limitações geradas pelo contrato didático contaminado de acepções positivista ao qual se interliga as organizações tradicionais do ensino universitário em que afloram as ações e práticas nas contemporâneas salas de aulas. Salas (2010) destaca que:

[...] todo o desenvolvimento da ciência esteve marcado pela chamada ciência positiva, a qual se caracteriza por interpretar os fenômenos e a forma como funcionam por meio de teorias e leis, em um contexto em que o ser humano assume um papel protagonista muito pobre, por não dizer nenhum. (p.133)

A influência do positivo omite o lado subjetivo do conhecimento que se entrelaça com diversificadas formas de conhecer, epistemologicamente reveladas em sua primazia por meio do objeto em detrimento da ação do sujeito enquanto personagem principal na construção do conhecimento. Aspecto este empreendido por Chevallard (2012) ao sintetizar a dimensão didática nas sociedades humanas como a constituição de múltiplas situações sociais na qual o fazer algo repercute na intenção que alguém possa “estudar” e “aprender” determinado feito, concebido como a participação didática da situação.

Seguindo esta vertente, alguns estudos de Chevallard (2009, 2010, 2012) apontam para emergência de um novo Paradigma de Questionamento do Mundo, que se opõe ao paradigma de “visitação de obras” e propõe:

Uma visão prospectiva sobre a dimensão didática em nossas sociedades que desejo explicitar, pode ser encapsulado num fato histórico crucial: o antigo paradigma didático que ainda floresce em tantas instituições escolares é obrigado a dar lugar a um novo paradigma ainda na infância. Para tornar uma longa história em curta, eu defino um paradigma didático como um conjunto de regras que prescrevem, ainda que implicitamente, o que deve ser estudado, quais são as apostas didáticas e quais são as formas de estudá-los. (CHEVALLARD,2012 p.2)

A partir deste sucinto esboço, a nossa análise se desenvolverá almejando alcançar respostas para as questões que foram apresentadas inicialmente, com o foco na álgebra vetorial e sua relevância nos diferentes âmbitos, como proposto pelo novo paradigma a criação de novo etos cognitivo, a partir do surgimento de questões Q percorremos um percurso de estudo e pesquisa em busca de resposta R satisfatórias.

### **Algumas Considerações**

Apresentamos algumas nuances e direcionamentos que revelam traços da nossa pesquisa de doutorado. Sinalizamos alguns elementos da filosofia e história das ciências que dialogam diretamente com a nossa temática. Destarte que estes e outros aspectos serão estudados densamente, visto que o intuito principal deste trabalho não constitui em apresentar respostas aos questionamentos expostos no texto, mas de exteriorizar inquietudes da nossa pesquisa.

Ao direcionar nossa atenção para o Modelo Epistemológico Dominante (MED) da álgebra vetorial e buscar desvelar as bases históricas e epistemológicas e consequentemente paradigmáticas constitui um preâmbulo para compreender as múltiplas interligações que compuseram a álgebra vetorial supostamente ensinada e apreendida em um Curso de Licenciatura em Matemática.

Os estudos de Chevallard que abordam a proeminência de um transitar de um paradigma inflexível e dominante para um paradigma que nos fornece subsídios para

questionar o mundo comporá a nossa trajetória de pesquisa, destacando que se trata da ponta do iceberg no oceano que se constitui os Cursos de Licenciatura em Matemática.

## Referências

BRASIL. Parecer CNE/CP 9/2001. **Diretrizes curriculares nacionais para a formação de professores da educação básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena.** Diário Oficial da União, Brasília, 18 jan. 2002, Seção 1, p. 31. Disponível em: < [http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01\\_02.pdf](http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_02.pdf) > Acesso em: 16 abr. de 2017.

\_\_\_\_\_. Resolução CNE/CP 1/2002. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena.** Diário Oficial da União, Brasília, 18 fev. 2002. Disponível em: < [http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01\\_02.pdf](http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_02.pdf) > Acesso: 05 jun. 2017.

\_\_\_\_\_. Resolução CNE/CP 2/2015. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada.** Diário Oficial da União, Brasília, 01 jul. 2015. Disponível em: < [http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_docman&view=download&alias=17719-res-cne-cp-002-03072015&category\\_slug=julho-2015-pdf&Itemid=30192](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=17719-res-cne-cp-002-03072015&category_slug=julho-2015-pdf&Itemid=30192) > Acesso em : 05 jun. 2017.

CAMARGO, Ivan de. **Geometria Analítica** / Ivan de Camargo, Paulo Boulos. 3ª ed. revisada e ampliada. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. In: **L'UNIVERSITE D'ETE**, 1998, p.91-118. Actes de l'Université d'été La Rochelle. Clermont-Ferrand, France: IREM, 1998.

\_\_\_\_\_. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. In: **Recherches en Didactiques des Mathématiques** 19(2). Grenoble: La Pensée Sauvage, 1999. p. 221-266.

\_\_\_\_\_. UMR ADEF **La notion de PER : problèmes et avancées** Toulouse, le 28 avril 2009 Texte d'un exposé présenté à l'IUFM de Toulouse . Disponível em: [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id\\_article=161](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161) Acesso: 15 agos. de 2017.

\_\_\_\_\_. **Enquêter pour connaître. L'émergence d'un nouveau paradigme scolaire et culturel à l'âge de l'Internet.** Communication à la journée de réflexion sur le thème « Une approche anthropologique du didactique » tenue le 15 octobre 2010 à l'Institut de mathématiques de l'université de Liège. Disponível em: < [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id\\_article=178](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=178) > Acesso: 02 de set. 2017.

MOTTA, C. D. B.; BROLEZZI, A. C. **A influência do positivismo na história da educação matemática no Brasil.** In: Congresso Luso-Brasileiro de História da Educação, 6, 2006, Uberlândia. Anais... Rio de Janeiro: Associação Nacional de

PósGraduação e Pesquisa em Educação (ANPEd), 2006. 1 v. p. 1-12. Acesso: <[http://www2.faced.ufu.br/colubhe06/anais/arquivos/426CristinaDalva\\_AntonioCarlos.pdf](http://www2.faced.ufu.br/colubhe06/anais/arquivos/426CristinaDalva_AntonioCarlos.pdf)>

SANTOS, Adriana Tiago Castro dos. **O estado da Arte das pesquisas brasileiras sobre geometria analítica no período de 1991 a 2014**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC, São Paulo, 2016. Acesso em 02 mar. 2017 em: <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/19047/3/Adriana%20Tiago%20Castro%20dos%20Santos.pdf>

SALAS, María Isabel Torres, **La enseñanza tradicional de las ciencias versus las nuevas tendencias educativas**. Revista Electrónica Educare, 2010, Disponível em: <<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=194114419012>> Acesso: 14 de setembro 2017.

SANTOS, Boaventura de Sousa. **Um discurso sobre as ciências**. 16ª edição. São Paulo: Cortez, 2010.

SILVA, Cibelle Celestino. **Da força ao tensor: evolução do conceito físico e da representação matemática do campo eletromagnético**. 2002. 250p. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin, Campinas, SP. Disponível em: <<http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000276363>>. Acesso em: 15 set. 2017.

UEFS, **Projeto Político Pedagógico** do Curso de Licenciatura em Matemática. Disponível em: [http://matematica.uefs.br/arquivos/File/docs/Projeto\\_Pedagogico\\_Matematica.pdf](http://matematica.uefs.br/arquivos/File/docs/Projeto_Pedagogico_Matematica.pdf). Acesso: 17/07/2017.





Núcleo Interdisciplinar de Pesquisa, Ensino e Didática das Ciências, Matemática e Tecnologia

III SEMINÁRIO DO NIPEDICMT  
CONTRIBUIÇÕES DA FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS PARA AS  
PESQUISAS EM DIDÁTICA DAS CIÊNCIAS

## RAZÕES DE SER PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES: ELEMENTOS DE SUA INSTITUCIONALIZAÇÃO ENQUANTO SABER A SER ENSINADO<sup>8</sup>

*Edmo Fernandes Carvalho<sup>9</sup>*

### **Resumo**

A compreensão dos conceitos matemáticos tem sido uma tarefa complexa nas práticas institucionais escolares. Discute-se nesse artigo a construção do problema didático da compreensão do conceito global de função como consequência da construção do pensamento algébrico, fruto de uma atividade matemática cuja razão de ser tem indícios de questões extra matemáticas. Esse é o caso da relação dos objetivos pragmáticos relativos ao desenvolvimento da Física e a institucionalização do conceito de função ligado a ideia de fórmula algébrica, enquanto objeto do saber a ser ensinado. Desse modo, pretende-se identificar o que institucionalizou o atual conceito de função (baseado na relação entre conjuntos) enquanto objeto do saber a ser ensinado? Para tanto, esboça-se um estudo teórico sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático, sendo as interpretações empreendidas sobre construções teóricas dos fatos, ou particularmente, fenômenos didáticos. Caracterizamos assim, um modelo epistemológico-didático dominante – MED, referente ao saber questão, como uma descrição desse saber em termos de praxeologias matemáticas institucionais. Da análise do MED, são apontados elementos que configuram uma incompletude da atividade matemática institucional, que reflete a necessidade de dispositivos didáticos codisciplinares.

**Palavras-chave:** Conceito de função, Modelo epistemológico dominante, Teoria Antropológica do Didático.

### **Introdução**

Alguns estudos (MATTHEWS, 1995; BASTOS, 1998; ADÚRIZ-BRAVO et al., 2002; DELIZOICOV, ANGOTTI & PERNANBUCO, 2007; ) tem voltado suas atenções para as contribuições da História e Filosofia das Ciências (HFC) para o ensino de ciências. Pode-se dizer que de modo meio tímido, na Educação Matemática, esse movimento tem sido

---

<sup>8</sup> Recorte de trabalho de tese em desenvolvimento, sob orientação do professor Dr. Luiz Marcio Santos Farias.

<sup>9</sup> Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências – Universidade Federal da Bahia (UFBA) e Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Membro do Núcleo Interdisciplinar de Pesquisas em Ensino e Didática das Ciências, Matemática e Tecnologias – NIPEDICMT/UFBA. E-mail: edmofc@gmail.com.

empreendido por uma de suas tendências, a História da Matemática, como forma de levar para o ensino da Matemática ideias que aproximam o estudante desta área do conhecimento. No entanto, vê-se pouco o questionamento da natureza da Matemática, sendo seu conjunto de saberes ensinado de forma que pareçam monumentos intocáveis, fenômeno didático que Chevallard (2004) denominou monumentalismo.

A análise de alguns fatos matemáticos e elementos da epistemologia da Matemática, nos permitiu visualizar outro fenômeno didático, a incompletude da atividade matemática institucional, ou seja, uma dissociação do saber-fazer matemático e dos discursos que os justifiquem.

Delimitando o objeto matemático para estudo desses fenômenos no conceito de função, questiona-se nesse trabalho, o que institucionalizou o referido conceito como objeto do saber a ser ensinado na educação básica. Nossa hipótese é que as razões que levaram o sistema educativo a integrar o saber funções no currículo da Matemática escolar, está fora do âmbito educacional, atendendo a objetivos pragmáticos das ciências da natureza e ao desenvolvimento científico, tecnológico e econômico da sociedade.

No desenrolar dessa discussão, apresentamos um recorte de um estudo histórico-epistemológico, que vimos desenvolvendo, tentando identificar nos fatos relativos ao desenvolvimento do conceito global de função, traços das praxeologias que hoje constituem-se como saberes matemáticos escolares. Isso caracteriza esta etapa desse trabalho como análise de um modelo epistemológico-didático dominante (MED). Conhecê-lo, auxilia na concepção de um modelo de referência para a proposição de dispositivos didáticos atentos a problemática do processo transpositivo.

Devido a compreensão do conceito de função ser uma tarefa complexa no âmbito educacional, propomos que falta ao seu ensino, um trabalho didático voltado ao questionamento da natureza desse saber, que antes mesmo já questionaria a natureza da própria Matemática, desmistificando seu status de ciência exata, e olhando para seu desenvolvimento ao longo da história. Para isso, acreditamos ser imprescindível que propostas didáticas sejam pautadas em modelos de aprendizagem por investigação, pressupondo assim, uma mudança no topos (papel) do professor e aluno constituindo uma relação que seja próxima de uma comunidade de estudo. Essa proposta, parte de Chevallard (2009), sendo denominada por este teórico de Pedagogia do conhecimento e questionamento do mundo.

Por conseguinte, modelos didáticos pautados nesse referida pedagogia, pressupõe que assim como podemos identificar no desenvolvimento de muitos saberes matemáticos que

constituem hoje o currículo da Matemática escolar, um apelo as necessidades humanas, a atividade matemática escolar possibilite a revelação da razão de ser do estudo dos objetos matemáticos, o que deve ocorrer por meio da apresentação à comunidade de estudo, de uma devolução de problemas genuinamente investigativos imbricados as necessidades da comunidade local, regional ou global.

Para dar conta do objetivo desse estudo, o percurso metodológico assumido é de natureza qualitativa e para construção dos dados, constitui-se num estudo teórico-conceitual (RUIZ, 2002). Nesse contexto os dados, são as concepções apresentadas ao longo da história do conceito de função, extraídas de alguns repositórios de institutos de história das ciências (em plataformas digitais), de onde tivemos acesso aos escritos de alguns matemáticos que se debruçaram no estudo das funções, especialmente o que fora apresentado por Euler.

Caracterizamos assim, um modelo epistemológico-didático dominante (MED) referente ao saber funções, como uma descrição desse saber em termos de praxeologias matemáticas institucionais. Da análise desse modelo, são apontados elementos que configuram uma incompletude da atividade matemática institucional, que reflete a necessidade propormos outros modelos de referência em contextos didáticos codisciplinares.

### **Problema didático: ensino de um conceito não tão consensual**

A ausência de compreensão do conceito de funções em algumas práticas institucionais escolares, se delimita quando pensamos como não compreender um conceito interfere na resolução de problemas reais que são modelizados por funções de um modo geral e das quadráticas especificamente falando do objeto matemático integrante do objeto de estudo em nossa tese. Diante disso, discute-se duas dimensões de um problema didático (PD) que temos nos dedicado em nossas investigações, a saber: econômica e ecológica<sup>10</sup>. Para tanto, utilizamos como estratégia para alcançarmos o referido objetivo, a análise do modelo epistemológico-didático dominante (BAQUEIRO et al. 2013), que chamaremos a partir daqui, por MED, do ensino/estudo do saber funções, e mais particularmente das funções quadráticas, no que se refere a sua representação gráfica e ao duplo estatuto da parábola.

Nesse ínterim, surgiram inúmeras questões que nortearam nossa pesquisa, sem que sejam ainda um problema didático de investigação. Mencionaremos algumas, enquanto

---

<sup>10</sup> Na primeira busca-se compreender os que tem menor custo cognitivo para o estudante, o que não significa que representará uma atividade matemática moldada por ferramentas matemática consideradas mais fáceis. A segunda, dá conta das condições de existência e sobrevivência de um saber numa determinada instituição.

questões prévias, ou docentes, no contexto de uma investigação inscrita na Teoria Antropológica do Didático – TAD (CHEVALLARD, 1999). Desse modo, fazendo referência ao título desse artigo, questionamo-nos sobre o porquê de ensinarmos funções? Para quem de fato deveríamos ensinar funções? O que de funções deveríamos ensinar? Se haveria necessidade de distinguirmos, no caso da função quadrática, o duplo estatuto da parábola? Dentre outras, que trazem a essência de inquietações docentes, diante de um cenário de ensino e aprendizagem com relações bastante complexas.

Assim, poderíamos caminhar sentido a outra questão: para resolver problemas de otimização quadrática preciso compreender o conceito de função? Com esta, nos aproximamos ainda mais do nosso objeto de investigação.

No entanto, nesse artigo, em que se apresenta um recorte de um trabalho doutoral em andamento, essas questões impulsionaram a atividade institucional do eu pesquisador (sujeito investigador/professor), de buscar elementos na história/epistemologia da matemática, que justificassem, tanto as lacunas teóricas-práticas no fazer matemático de estudantes e professores, quanto aspectos intrínsecos do saber matemático, que extrapola o ambiente educacional. Para este último, precisávamos de um recorte temporal, para que pudéssemos aprofundar as análises dos fenômenos<sup>11</sup> referentes ao saber em questão, por isso nos detivemos aos fatos e o que está nas entrelinhas do que é contado sobre estes, a partir do século XVIII, com o conceito moderno de funções, por acreditarmos que de modo particular, estão nesse período a raiz da institucionalização do referido objeto matemático enquanto saber a ser ensinado.

Nossa proposta então, consiste num trabalho descritivo-analítico de um modelo epistemológico-didático dominante (MED) referente ao saber funções, o que nos leva a apresentar nossa concepção de modelo epistemológico - ME, estando este umbilicalmente relacionado a TAD. Nesse sentido, o ME didático, refere-se à descrição do saber matemático em termos de praxeologias matemáticas institucionais (CHEVALLARD, 1999), tendo sido apresentado aqui no Brasil popularmente por praxeologia matemática ou organização matemática, enquanto um conjunto composto por dois blocos: o saber-fazer e o logos, ou discurso racional que justifica o referido saber-fazer.

Sob a lente dessa noção teórica, a análise que apresentaremos consiste na descrição de praxeologias, por meio de traços como o conceito em língua natural, símbolos, notações,

---

<sup>11</sup> Conforme Chevallard (2013), interpretações teóricas de fatos.

dentre outros que nos permitam inferir a respeito do saber-fazer matemático da época, o discurso que os justificava e como está inscrito hoje no currículo. Ademais, as dificuldades inerentes as praxeologias matemáticas no estudo das funções (REZENDE, PESCO, BORTOLOSSI, 2012; SILVA, 2013; GOMÉZ, 2013) são aqui tratadas do ponto de vista da TAD. Isso implica em dizer que as possíveis causas dessas dificuldades, como compreender o conceito global de função, de identificação de uma função, de representação gráfica, das passagens de um domínio matemático a outro, da resolução de problemas modelizados por funções, não são apenas de ordem cognitiva, para além disso, são de ordem institucional.

Passamos então, a discussão do desenvolvimento do conceito de função ao longo da história, mais precisamente em parte da idade contemporânea, compreendendo os séculos XVIII e XIX. Vale salientar, que por não se tratar de uma investigação da linha de história das ciências, o que apresentamos é um ensaio com alguns elementos epistemológicos-históricos do desenvolvimento do saber em questão.

De todo modo, nosso intuito é responder à questão diretriz apresentada na introdução, na tentativa de explicitar elementos de consenso no que se refere ao conceito de função estudado, resultando no que atualmente é considerado válido. Todos os aspectos do desenvolvimento do saber em jogo, subsidiarão no seguimento de nossa discussão, a apresentação de argumentos a respeito do que estamos nomeando de Incompletude da atividade matemática institucional, esperando destacar aqui, aspectos que criam um ambiente de condições alcançadas para o ensino de funções, que particularmente no prosseguimento da investigação nos deteremos sobre as funções quadráticas.

### **Desenvolvimento do conceito de função: análise de um modelo epistemológico**

Em estudos inscritos na TAD, que dão conta da modelização funcional, considera-se como postulado básico, a ideia de que os mistérios relativos ao ensino e aprendizagem da matemática, ou da Educação Matemática, estão na própria Matemática<sup>12</sup> (GASCÓN, 1998). Seguindo esse princípio, justificamos a necessidade de um estudo de ordem epistemológica-histórica, numa tentativa de darmos conta desses mistérios intrínsecos aos saberes em jogo, podendo assim, atacarmos de forma efetiva os problemas didáticos identificados.

---

<sup>12</sup> Nessa obra o autor apresenta um Programa epistemológico de Investigação, surgindo como respostas à uma insuficiência dos modelos epistemológicos da Matemática.

Consoante com a proposição de Gascón (1998), iniciamos com a apresentação da gênese do conceito de função até sua consolidação, com o que temos hoje, sendo utilizado de forma privilegiada nos manuais didáticos adotados a nível nacional brasileiro.

Levantamos duas hipóteses, que constataremos por meio de uma revisão de literatura e/ou análise documental, a primeira denotada aqui por H1: o que institucionalizou o conceito de função nas práticas institucionais da pesquisa em matemática foram as necessidades sociais, especialmente de tornar mais profícua a tarefa de comunicar-se a respeito de modelos que representassem os mais variados fenômenos do mundo físico. Já a hipótese 2, H2: Para o ensino, o conceito de função deveria atender os objetivos pragmáticos ligados aos interesses econômicos das sociedades, de modo mais específico a formação de mão de obra para atividades laborais que não necessitavam da compreensão da razão de ser dos saberes estudados.

No estudo da evolução do conceito de função, temos então duas visões a considerar, uma que a matemática é produção da atividade mental humana, e a outra que tem um valor intrínseco, uma objetividade própria (POPPER, 2002), a hipótese H1 parece se relacionar mais com a segunda visão, visto que, por ser dotada de objetividade própria o conjunto de conhecimentos matemáticos, teria elementos para auxiliar outras ciências na interpretação de seus fenômenos num plano, e em outro, que trataria nada mais que uma ferramenta útil para atender aos interesses econômicos e bélicos.

Esclarecidas nossas intenções, destacamos que em Sierpinska (1992), por exemplo, encontramos algumas indicações de momentos da evolução da ideia de função. Dentre esses momentos, ele destaca os papéis exercidos pelos ‘domínio’ e ‘contradomínio’ na relação de variabilidade entre conjuntos, envolvidos na definição desse objeto matemático<sup>13</sup>. Hoje bem aceito enquanto um dos conceitos de função, ao longo do desenvolvimento desse saber, sua aceitação não foi simples assim. Com base nisso, vemos indícios de que não era uma tarefa trivial, a distinção entre ordem das variáveis em algumas práticas, como ocorre hoje. Mas esse é um problema pouco constante nas praxeologias discentes. Não é a ordem das variáveis, mas, as características da relação entre variáveis que se constitui um elemento complicador nessas práticas institucionais.

Considerando que parece não ser consensual entre pesquisadores e historiadores, a origem do conceito de função, temos nossa problemática amplificada, a respeito da

---

<sup>13</sup> Chevallard (1992) utiliza o termo objeto matemático para designar os saberes matemáticos, acreditamos que influenciado pela noção de objeto cultural, proposto por Leontiev na Teoria da Atividade.

institucionalização desse conceito nas praxeologias institucionais, em que buscamos não propriamente o que permite essa institucionalização hoje, mas o que permitiu tal consenso num período de profícuos debates e constantes mudanças nas concepções sobre os saberes matemáticos ainda não consolidados com implicações para a forma de matematizar hoje.

Voltando um pouco atrás, fora do nosso recorte temporal, encontra-se indícios de uma certa intuição de relação funcional entre variáveis, remontando os cálculos babilônicos, evidenciadas por meio de umas espécies de funções tabuladas, uma conceituação, se assim podemos dizer, pragmática desse saber, isso por volta de 2000 anos A. C., mas a relação de variabilidade intuitiva, já era uma prática comum também entre os gregos, que as representavam por tabelas relacionando grandezas matemática e físicas, principalmente relativas a astronomia (YOUSCHKEVITCH, 1976, apud MACHADO, 1998).

Ao apresentarmos a evolução do conceito de função, estamos apresentando o que de certo modo é consensual para um grupo, uma comunidade de matemáticos, que de forma intencional ou não atenderiam não só aos interesses triviais dos seres humanos, mas o campo de necessidades fora de interesses ingênuos, sendo em alguns casos armamentistas e de desenvolvimento de outros ramos das ciências e tecnologia. Nesse contexto, as funções, ou melhor o seu conceito, surge como um objeto cultural, oriundo de necessidades humanas, nem sempre básicas, mas pragmáticas quanto outras ciências e seus objetivos.

Observe-se que essas funções tabuladas, atendiam as necessidades práticas de um período, e ainda que não fossem compreendidas como função de acordo com conceito formatado contemporaneamente, mantinham a essência do que podemos dizer que é raiz epistemológica desse conceito, a ideia de relação de variabilidade entre quantidades.

Kleiner (1989) e Youschkevitch (1976, apud MACHADO, 1998), destacaram a ideia de funcionalidade como uma das primeiras concepções do conceito de função, Essa mesma ideia de funcionalidade aparece nas funções tabuladas presentes nas práticas dos astrônomos babilônicos e nos estudos geométricos dos gregos, sendo no primeiro caso, caracterizado por relações numéricas, por vezes também descritas verbalmente ou por registros escritos da língua natural.

Partindo para a idade moderna, como forma de aproximarmos de ensaios de respostas à questão diretriz, especificamente para o século XVII, encontramos em Eves (2004), informações sobre os primeiros registros da palavra função em forma latina equivalente, que teria sido empregada por Leibniz precisamente em agosto de 1673, num manuscrito não

publicado, intitulado "Método Inverso das tangentes ou sobre funções"<sup>14</sup>. Já no século XVIII, Bernoulli, já considerava função como expressão composta de uma variável e algumas constantes. Percebemos que aquilo visto na atividade matemática escolar atual, configurada por equívocos na compreensão do conceito de função enquanto relação estática de variáveis, pode ter raiz epistemológica na ênfase dada a presença de constantes na conceituação proposta por Bernoulli.

Ainda nesse período, Euler considerava função como equação (fórmula) que envolvesse variáveis e constantes, encontrada em sua obra *Introdução à análise do infinito*, publicada em 1748. A definição apresentada era assim enunciada: “une expression analytique composée d’une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes”. Observe-se que a raiz do que conduz parte significativa das praxeologias nas instituições que se dedicam a Matemática escolar, está nessa forma de conceber o conceito de função proposto por Euler, mas essa concepção não foi estabelecida do nada, Euler tomou de seu mestre Bernoulli, a espinha dorsal desse conceito.

Apresentamos um recorte da obra *Introdução à análise do infinito*, nas duas figuras a seguir, onde, Euler apresenta algumas ideias para composição do conceito de funções. Não são os manuscritos de Euler, mas trechos digitalizados em francês das ideias originais desse matemático.

**Figura 1** – Extrato de *Introductio in analysin infinitorum* d’Euler (1748)

---

<sup>14</sup> “A introdução do cálculo por Leibniz e Newton deu lugar de destaque ao problema de pesquisa das leis de variáveis em quantidades desconhecidas, permitindo a relação de funcionalidade para se tornar um objeto matemático em si”. Fonte: *Master Mathématiques et applications : Enseignement et formation. Histoire des sciences mathématiques 1, Eléments d’histoire de l’analyse 2/2 : « L’histoire du concept de fonction au XVIIIe siècle et le problème des cordes vibrantes »* (2011), disponible en: [http://www.edu.upmc.fr/math/prive/guilbaud/Master\\_Enseignement/M1/MME04\\_6.pdf](http://www.edu.upmc.fr/math/prive/guilbaud/Master_Enseignement/M1/MME04_6.pdf).



3. Une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.

Elle peut donc le devenir d'une infinité de manières, puisqu'on peut lui substituer tous les nombres imaginables. La signification d'une quantité variable ne peut être censée épuisée, qu'autant qu'on aura conçu en sa place toutes les valeurs déterminées. Ainsi une telle quantité comprend tous les nombres tant positifs que négatifs, les nombres entiers & fractionnaires, ceux qui sont rationnels, irrationnels & transcendants; on ne doit pas même en exclure zéro, ni les nombres imaginaires.

4. Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité & de nombres, ou de quantités constantes.

Ainsi toute expression analytique, qui outre la variable  $x$  contiendra des quantités constantes, est une fonction de  $x$ .

Par exemple,  $a + 3x$ ;  $ax - 4xx$ ;  $ax + b\sqrt{aa - xx}$ ;  $cx$ ; &c, sont des fonctions de  $x$ .

Fonte:

[http://www.edu.upmc.fr/math/prive/guilbaud/Master\\_Enseignement/M1/MME04\\_6.pdf](http://www.edu.upmc.fr/math/prive/guilbaud/Master_Enseignement/M1/MME04_6.pdf)

Dos postulados apresentados nesse extrato, note-se que no 3, por exemplo, Euler refere-se a características das quantidades variáveis, que são quantidades indeterminadas ou universais que compreendem todos valores determinados, reais, como ele exprime no parágrafo seguinte as classes desses valores. No postulado 4, explicitamente utiliza o termo função, em que diz: “Uma função de quantidade variável é uma expressão analítica composta, no entanto, pode ser, da mesma forma de quantidade de números, ou de quantidades constantes”. Por expressão analítica composta, entenda-se as fórmulas algébricas que indicam relações entre grandezas variáveis e constantes.

**Figura 2** - Extrato de *Introductio in analysin infinitorum* d'Euler (1748) conceitos 6 e 7

6. La principale différence des fonctions consiste dans la combinaison de la variable & des quantités constantes, qui les forment.

Elle dépend donc des opérations par lesquelles les quantités peuvent être composées & combinées entr'elles. Ces opérations sont l'Addition & la Soustraction; la Multiplication & la Division; l'Élévation aux Puissances & l'Extraction des Racines; à quoi il faut ajouter encore la Résolution des Équations. Outre ces opérations, qu'on appelle algébriques, il y en a plusieurs autres qu'on nomme transcendentes: comme les exponentielles, les logarithmiques, & d'autres sans nombre, que le Calcul Intégral fait connoître.

Distinguons cependant certaines espèces de fonctions; savoir, les Multiples  $2x$ ;  $3x$ ;  $\frac{1}{2}x$ ;  $ax$ , &c. & les Puissances de  $x$ ; comme  $x^n$ ;  $x^1$ ;  $x^{\frac{1}{2}}$ ;  $x^{-1}$ ; &c, quantités formées par une seule opération, & qui, comme celles qui résultent de la combinaison de plusieurs, ne laissent pas de porter de même le nom de fonctions.

7. Les fonctions se divisent en algébriques & en transcendentes; les premières sont formées par des opérations algébriques

Fonte:

[http://www.edu.upmc.fr/maths/prive/guilbaud/Master\\_Enseignement/M1/MME04\\_6.pdf](http://www.edu.upmc.fr/maths/prive/guilbaud/Master_Enseignement/M1/MME04_6.pdf)

Do extrato acima, ilustrativo da forma particular que se difundiu nas praxeologias da época, tomamos o postulado 6, em que Euler caracteriza o que diferencia as funções. Nesse caso, as funções dependem das operações pelas quais as quantidades podem ser compostas e combinadas entre elas (trad. Nossa). No postulado 7, talvez seja o que mais se aproximou do conceito de função e do processo de algebrização praticado hoje. Tal processo, indicou uma tentativa da corrente formalista de sintetizar os fenômenos relativos as outras ciências.

Ainda que consideremos essa forma de conceituar uma produção humana, as operações trariam elementos autônomos que fugiriam ao controle da ação humana de produzir um saber (POPPER, 2000). Nesse sentido, a Matemática, existindo de forma objetiva, sendo um campo de verdades objetivas, tinha ferramentas para solucionar os problemas de outras áreas do conhecimento (herança do platonismo).

A despeito do que se falou sobre o surgimento da palavra função e conceitos que se aproximavam de nossas atuais praxeologias matemáticas frente a atividade matemática no estudo/ensino de conceitos, vejamos o que propunha em termo de definição Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) citado em Eves (2004):

Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis  $x$  e  $y$  estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a  $x$ , corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a  $y$ , então se diz que  $y$  é uma função (unívoca) de  $x$ . [...] (p.661).

Essa definição é tão ampla que dispensa a necessidade de qualquer forma de expressão analítica a relação que há entre  $x$  e  $y$ , essa definição acentua a ideia de relação entre dois conjuntos de números (conceito de função através da linguagem da Teoria de Conjuntos), dando-se maior ênfase a área da álgebra abstrata (EVES, 2004).

Apontamos com base em Kleiner (1989), quatro eventos ocorridos no período moderno, que contribuíram para a institucionalização do conceito de função: A união da álgebra e da geometria; a introdução do movimento como problema central na ciência (desenvolvimento em função dos avanços das investigações na Física); a invenção da álgebra simbólica (uso de fórmulas para modelizar os fenômenos); e a invenção da geometria analítica.

Desses quatro eventos surge mais uma hipótese, ora denominada aqui por Hipótese 3: a institucionalização do conceito de função hoje ensinado se deu por conta do surgimento de uma ciência que se desenvolvia sob severas influências da matemática – uma ciência matematizada (GOMÉZ, 2013), à medida que esse processo ocorria, e isso passava a tornar-se objeto de ensino, a razão de ser desse conceito tornava-se cada vez mais implícita. Segundo Kleiner (1989), tal matematização da ciência, sugeria uma visão dinâmica e contínua da relação funcional, em oposição a visão estática no contexto numérico discreto sustentado pelos matemáticos da idade antiga, no entanto, o efeito para a matemática escolar, foi inverso (grifo nosso).

Gómez (2013) destaca que no século XIX, Dirichlet formula pela primeira vez o conceito moderno de função expresso pela equação  $y = f(x)$  de uma variável independente em um intervalo  $a < x < b$ . Está é uma definição formal, que não dizia nenhuma só palavra sobre a necessidade de dar a função por meio de uma fórmula, sobre todo o domínio de definição. Nesse contexto,  $Y$  é uma função de uma variável  $x$ , definida em um intervalo  $a < x < b$ , se a todo valor da variável  $x$  neste intervalo, corresponde um valor definido da variável  $y$ .

### **Considerações finais**

Nesse artigo, nos detivemos a análise do MED, mas necessita ser ampliado com o desenvolvimento da investigação. Destacamos que o que institucionalizou o conceito moderno de função enquanto saber a ser ensinado, deve estar relacionado a hipótese H2 supramencionada. Ao compararmos o conceito inicial que apresentamos com o mais próximo do que hoje integra as práticas institucionais escolares, identificamos traços que caracterizam

o fenômeno didático que temos estudado atualmente, denominado incompletude da atividade matemática institucional.

Por conseguinte, tal incompletude, reflete na cristalização das praxeologias matemáticas quando os sujeitos estudam o conceito de funções. Nesse sentido, há uma sinalização para uma recontextualização do ensino da Matemática via HFC, o que ainda é um desafio e acrescentamos modelos de aprendizagem baseados em investigação.

Pretendemos analisar no prosseguimento da investigação se existem aspectos que indiquem uma dualidade entre conceitos e sua relação com o referido fenômeno, ação necessária para a concepção do modelo epistemológico de referência que tomará corpo num modelo de aprendizagem por investigação, mas especificamente num percurso de estudo e pesquisa.

## Referências

ADÚRIZ-BRAVO, A.; IZQUIERDO, M.; ESTANY, A. Una propuesta para estructurar la enseñanza de la filosofía de la ciencia para el profesorado de ciencias en formación. **Enseñanza de las Ciencias**, 20 (3), 465-476, 2002.

BASTOS, F. História da ciência e pesquisa em ensino de ciências: breves considerações. In:

NARDI, R. (Org.). **Questões atuais no ensino de ciências**. São Paulo: Escrituras Editora, 1998, p. 43-52.

CHEVALLARD, Y. (Août de 1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 19, pp. pp. 221-266.

\_\_\_\_\_. La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. In: **15e Ecole d'été de didactique des mathématiques**, août 2009, France. **Cours à l'EE...** Clermont Ferrand - IUFM, 2009, disponível em: [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Cours\\_de\\_YC\\_a\\_l\\_EE\\_2009.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Cours_de_YC_a_l_EE_2009.pdf). Acesso em 15/06/2016.

\_\_\_\_\_. Vers une didactique de la codisciplinarité: Notes sur une nouvelle 6 de maio de 2017 de <http://yves.chevallard.free.fr/>.

DELIZOICOV, D.; ANGOTTI, J. A.; PERNAMBUCO, M. M.. **Ensino de ciências: fundamentos e métodos**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2007.  
épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée*. Lyon, 2004. Recuperado em

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

FARRAS, B. B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.15, n.1, pp.1-28, 2013.

GASCÓN, J. (avril de 1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 18, pp. p.7-34.

GÓMEZ, J. L. D. El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. El Cálculo y su Enseñanza, Volumen 4, © 2013, **Cinvestav-IPN**, México, D.F. 14 [http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el\\_calculo/](http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/).

KLEINER, I. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. **The College Mathematics Journal**, September 1989, Volume 20, Number 4, pp. 282–300.

MACHADO, A. C., **A aquisição do conceito de função**: perfil de imagens produzidas pelos alunos. 1998. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação da UFMG, Belo Horizonte, 1998.

MATTHEWS, Michael R. História, Filosofia e Ensino de Ciências: a Tendência Atual de Reaproximação. **Revista Caderno Catarinense de Ensino de Física**, v. 12, n. 3: p. 164-214, dez. 1995. Disponível em: Acesso em: 20 jun. 2017.

POPPER, K. R. **A lógica da pesquisa científica**. São Paulo: Cultrix, 2000.

REZENDE, W. M.; PESCO, D. U.; BORTOLOSSI, H. J. Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra. **Anais da 1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra**. ISSN 2237-9657, pp.74- 89, 2012.

RUIZ, J. Á. **Metodologia científica**: guia para eficiência nos estudos. 5 ed. SP: Atlas, 2002.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Ed.) **The concept of function**: aspects of epistemology and pedagogy. Washington, USA: Mathematical Association of America, 1992. p. 25-58.

## CONTRIBUIÇÕES HISTÓRICAS E FILOSÓFICAS PARA COMPREENSÃO DA EVOLUÇÃO DO CONCEITO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

*Eliane Santana de Souza*

**Resumo:** A trigonometria junto as funções seno e cosseno, é considerada por parte significativa dos discentes como um conteúdo de difícil entendimento. Nesse sentido, buscamos na história e filosofia subsídios para compreendermos o processo evolutivo das funções seno e cosseno, e detectar, caso exista, possíveis incompletudes que venham influenciar no ensino atual dessas funções. Em busca de entendermos sobre a evolução do conceito das funções seno e cosseno, estenderemos nosso estudo também para a história e epistemologia da trigonometria, pois para concebermos a evolução do conceito das mesmas, se faz necessário visitar a evolução da trigonometria até chegar às funções. Realizamos uma análise bibliográfica, no intuito de construir nossa revisão histórica, para destacar os fatores determinantes na evolução do conceito das funções seno e cosseno. E baseado nesses estudos, notamos que durante todo o processo evolutivo do campo trigonométrico a existência de técnicas que venha a evoluir com o passar dos tempos, mostrando a sua ligação fortíssima à astronomia, bem como a existência da razão social de cada conteúdo, que atualmente vem sendo perdido em nosso ensino. Destarte, destacamos como uma das grandes contribuições históricas e epistemológica para o ensino das funções seno e cosseno, a relação da razão de ser social que perdurou em todo processo de desenvolvimento da trigonometria, mostrando a relevância dessa integração do conhecimento científico com as motivações para seu avanço. E conseqüentemente, essa integração do saber científico com a razão de ser social pode aproximar esses conteúdos a temas de interesses dos alunos.

**Palavras-Chave:** Funções seno e cosseno; Razão de ser social; História e Filosofia das Ciências.

### **Introdução**

A matemática desde os Anos Iniciais ao Ensino Médio é tida como uma das disciplinas mais difíceis para os alunos. Essa dificuldade vem perdurando nos processos de ensino e de aprendizagem e tem refletido nos resultados das avaliações de larga escala, as quais trazem como resultado um nível baixo em relação ao desempenho dos alunos na referida disciplina. A avaliação do PISA reforça essa situação ao mostrar em seu relatório de desempenho dos países, na avaliação de 2015 dos 70 países participantes o Brasil ocupou a posição entre 66<sup>a</sup> em matemática (OECD, 2015).

Essa complexidade no desempenho em matemática nos faz refletir sobre o processo de ensino e de aprendizagem de matemática no país. E desse modo, temos o ensino de trigonometria, em especial funções seno e cosseno como um dos conteúdos mais difíceis na concepção dos alunos desde o Ensino Médio até no Ensino Superior (PEDROSO, 2012). De acordo com algumas pesquisas como Pedroso (2012), Coloneze (2012) e Costa (1997), essa dificuldade dos alunos em trigonometria e funções

trigonométricas está relacionada à forma trabalhada do conteúdo, sendo o mesmo apresentado sem sentido para os alunos, muitas vezes pela ausência de aplicação desses assuntos com a realidade dos mesmos.

Em busca de caminhos para amenizar essas dificuldades no ensino de funções trigonométricas, apresentamos nesse trabalho um estudo histórico-epistemológico a respeito do desenvolvimento da trigonometria e funções trigonométricas no intuito de compreender a gênese do conhecimento científico, ou seja, como a análise epistemológica desperta em nós pesquisadores da área de educação matemática a diferenciação entre o saber científico e o saber ensinado.

Sendo as funções seno e cosseno o objeto matemático dessa pesquisa, ampliamos nossa análise histórica e epistemológica para trigonometria e funções trigonométricas visto que, para compreender a evolução do conceito das funções seno e cosseno, se faz necessário visitar a evolução da trigonometria até chegar às funções trigonométricas.

A partir das análises tecidas é possível perceber as dificuldades geralmente encontradas no ensino e aprendizagem e distingui-las daquelas que são inevitáveis para o processo de construção do conhecimento (ALMOULOU, 2007).

Nesse sentido, buscaremos respostas aos seguintes questionamentos: como se desenvolveram as funções trigonométricas? Quais incompletudes surgiram no processo de desenvolvimento de funções trigonométricas e se as mesmas ainda permanecem? Quais razões de ser das funções trigonométricas?

A presente análise tem como principais referências Kennedy (1992), Fonseca (2010; 2015), entre outros.

Com base nos estudos realizados, utilizaremos para análise as subdivisões da trigonometria considerada por Fonseca (2015), a saber: trigonometria esférica, trigonometria plana (geométrica – triângulo retângulo; analítica – circular: circunferencial; cônica: parabólica, elíptica e hiperbólica;) etc.. Salientamos que essa análise não se limita apenas a história da matemática, mas também a outras ciências que envolvem a trigonometria.

Nossa análise epistemológica se iniciará a partir das necessidades práticas e fenômenos naturais até chegar a formalização dos conceitos do campo trigonométrico. Será dividida em quatro marcos históricos, denominados de estágios.

### **O primeiro marco histórico**

As funções trigonométricas conforme traz Nogueira (2007) *apud* Fonseca (2015), nasce da astronomia. Destarte para analisar epistemologicamente essas funções, é necessário visitarmos o campo da física, geometria e astronomia.

De acordo com Chevallard (1992) a matemática se desenvolveu a partir de necessidades básicas da população, o que especificamente ele chama de razão de ser social. Chevallard (1992) afirma que atualmente vem se perdendo essas razões de ser sociais da matemática. Nesse sentido, a nossa análise parte da investigação das razões de ser sociais do desenvolvimento da trigonometria e funções trigonométricas, a fim de compreendermos a epistemologia do nosso objeto de saber funções seno e cosseno.

A trigonometria, bem como as funções trigonométricas, surgem conforme traz Fonseca (2015) para resolver problemas de cálculo de incógnita, para calcular distância inacessíveis entre a terra e a lua; e também para controle de variáveis, na observação da influência da natureza sobre o clima, astros, terra, entre outros. Kennedy (1992) ressalta que a história da trigonometria mostra o surgimento de três áreas da matemática: álgebra, análise e geometria.

Assim, de acordo com Faria (1987), quando comparamos as primeiras evidências da astronomia com a geometria, há um distanciamento de mais de 4,5 milhões de anos a. C. (*apud* FONSECA, 2015). Esse trabalho nos permitiu a compreensão da geometria e da astronomia na contribuição histórica-epistemológica das funções trigonométricas e trigonometria.

Com base nas razões sociais em atender a necessidade agrícola, compreender os corpos celestes, calcular distâncias inacessíveis, a astronomia junto a geometria dá lugar para o surgimento das primeiras evidências das funções trigonométricas. E assim, a partir dessa junção entre a astronomia e a geometria surge “a gênese de suas notáveis especializações: o campo trigonométrico” (FONSECA, 2015, p. 202). De acordo com o mesmo autor o campo trigonométrico contempla a trigonometria e as funções trigonométricas.

No período pré-histórico, já temos rabiscos que indicam o desenvolvimento da trigonometria e das funções trigonométricas, a partir das “sequências numéricas relacionando a comprimentos das sombras com horas do dia” (KENNEDY, 1992, p.01).

Baseado nesses estudos, podemos observar que a compreensão do tempo, por meio de sombras de varetas na vertical ao longo do dia, mostra o início da história da trigonometria. E, por conseguinte, tem-se que nesse período da pré-história a trigonometria aparece com o objetivo de atender a necessidade de mensurar o tempo, e



compreendê-lo a partir da análise do comprimento da sombra de uma vareta vertical. Segundo Kennedy (1992) foram encontrados esses registros em tabulados no alto Egito, em média no século XIII a.C., que representam os “antepassados” da função tangente e cotangente, como afirma o autor.

Em outras localidades também foram encontrados registros sobre esses marcos iniciais da trigonometria, como na Índia, Grécia, Mesopotâmia, entre outras. Esses registros explicitam a primeira razão social da trigonometria e funções trigonométricas, a qual foram os fenômenos climáticos. A agricultura na época era a maior atividade de subsistência, e nesse sentido, se fez necessário compreender as mudanças climáticas de cada estação, que influenciava na plantação, desde a movimentação do sol e da lua, até as mudanças climáticas. Isso motivou a necessidade de uma formalização matemática, a qual segundo Fonseca (2015) surgiu a partir da criação dos primeiros triângulos, enquanto objeto matemático, que permitia fornecer possíveis respostas para melhor período para produção agrícola.

Destarte, Kennedy (1992) destaca que nesse momento aparece a noção de função do desenvolvimento do campo trigonométrico, sendo a hora do dia e as estações do ano como variáveis independentes. Kennedy (1992) categorizou esses marcos como estágios, sendo a função sombra como o Estágio 1. Segundo o autor a identidade da trigonometria ainda foi posta a parte, e esse estágio foi como uma disciplina escolar, em especial, para agrimensores e navegadores.

O estudo de triângulos conforme afirma Kennedy (1992) é a referência mais antiga da trigonometria, porém compreendemos o mesmo considerando alguns saltos descontínuos que ainda não foram descobertos.

Assim como Fonseca (2015) traz, iniciaram-se os estudos dos triângulos considerando os ângulos e lados do mesmo. Em seguida, a partir de comparações entre diferentes triângulos de diferentes tamanhos, começou-se a observar as primeiras propriedades geométricas, que trouxe como consequência a configuração da trigonometria, com a semelhança de triângulos.

### **Segundo marco histórico**

O segundo marco histórico/**estágio 2**, considerado por Kennedy (1992), foi a função corda de um arco de círculo arbitrário, sendo essa função que originou a função seno. O autor ainda afirma que foi o teorema de Menelau que tratava de quadriláteros completos planos ou esféricos, que permitiu a expansão da trigonometria à esfera.

Essas informações segundo Kennedy (1992) surgiram na região do Mediterrâneo Leste, e foram registradas em grego, em média no século II. E foi na Índia que o centróide das atividades se deslocou, e a função corda tornou-se variações do seno. No período do século IX ao século XV, na Síria e na Ásia Central, a nova função seno e as antigas funções sombras foram tabuladas em sexagésimos. Kennedy afirma que “com esse desenvolvimento surgiu a primeira trigonometria genuína, no sentido de que só então o objeto de estudos tornou-se o triângulo plano ou esférico, seus lados e ângulos” (1992, p.02). Ele afirma que à medida que essa nova trigonometria foi se expandido para diversas regiões, a mesma foi se desenvolvendo, de modo a concluir que o crescimento da trigonometria é exponencial em relação ao tempo.

Nesse sentido, o instrumento básico conforme apresenta Kennedy é a função corda, “ainda tabulada em manuais de engenharia, precursora do seno”. Ele destaca a necessidade de um sistema posicional para representação dos números nos cálculos, e ressalta que desde o segundo milênio a. C., a função corda já existia no sistema sexagesimal desenvolvido na Mesopotâmia (KENNEDY, 1992).

Ptolomeu em seu livro I, já mostrava como calculava uma tábua da função corda. Observa-se a relação de expressões relacionando cordas e arcos suplementares, para aplicação do teorema pitagórico. Segundo Kennedy (1992), para resolver qualquer figura retilínea a partir da tábua de cordas, faz-se necessário decompor a figura em triângulos retângulos e em seguida resolvê-las. Além disso, ele afirma em sua obra que dados dois catetos, pode-se utilizar o teorema de Pitágoras para encontrar a hipotenusa, e depois para achar os ângulos, basta utilizar a tábua de cordas.

Observamos no desenvolvimento da trigonometria a utilização da geometria e da álgebra geométrica já trabalhada por Euclides, nos *Elementos*. Aparentemente Kennedy (1992) afirma que a impressão é que Ptolomeu sistematicamente expôs conhecimentos bem trabalhados em seu tempo, inclusive ele frisa que Ptolomeu também incluiu o trabalho que desapareceu de Hiparco, o qual consistia em um tratado de cordas, escrito três séculos antes dele.

Entretanto, Fonseca (2015) destaca que o desenvolvimento da astronomia se baseou na concepção de esfera celeste, antes mesmo de Hiparco e da trigonometria plana de cordas.

De acordo com Kennedy (1992), para explorar essa ideia da esfera, era necessário o desenvolvimento de “uma técnica para calcular uma grandeza incógnita sobre a esfera em termos de grandezas conhecidas” (p.08), ele ainda frisa que uma opção

de solução seria um cálculo que envolvesse entidades esféricas em si, ângulos, superfícies e arcos. E assim uma forma alternativa prática, seria a transformação dos objetos esféricos em regiões planas, e trabalhar com o cálculo de cordas, conhecida como projeção esferográfica (estereográfica), podemos observar essa projeção como uma técnica prática.

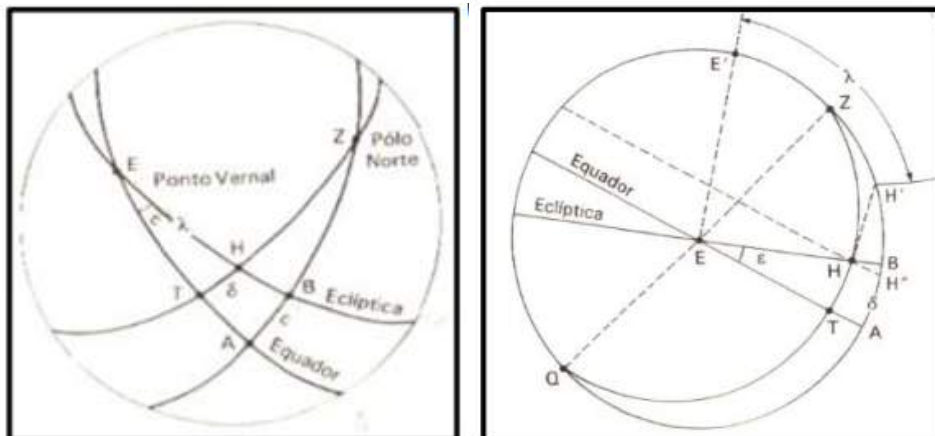
Assim, Kennedy ressalta alguns pontos importantes a serem considerados, um deles é que qualquer configuração a respeito a esfera celeste composta de círculos, pode ser transformado em uma figura plana, constituída por círculos e linhas retas, sendo resolvida por tábuas de sombras ou cálculo de cordas. Ele destaca que por mais que pareça simples, a resolução é complexa e longa. Outro ponto importante é que por mais que um polígono esférico não é uma figura plana, seus lados são.

### **O terceiro marco histórico**

Esse processo de transformação de uma esfera celeste em uma figura plana, determinando assim uma projeção esferográfica para ser resolvida por cálculo de cordas, marcam o **estágio 3** que é destacado pelo surgimento da função esferográfica que representa aplicações da função corda, como Fonseca (2015) ressalta. Destacando um dos pontos citados acima, o qual traz que os lados de um polígono esférico é plano, nessa função esferográfica, busca-se “forçar” em um único plano a acomodação de todos os círculos apresentados em uma situação, essa acomodação pode se por projeção ortográfica ou por rotação. Kennedy (1992) discute que ao realizar essa acomodação, se mantém a verdadeira grandeza dos arcos, sem apresentar distorções, podendo ser realizado procedimentos de cálculo e de medição, esse método é chamado de analemas, que são métodos geométricos descritivos. Ele ressalta que os analemas surgiram nos tempos clássicos, foram bastante utilizados e divulgados na Idade Média e que até hoje são utilizados (KENNEDY, 1992).

Observamos abaixo noções de projeções ortográficas de um problema de astronomia, abordado por Kennedy (1992). A figura 2 A mostra dois círculos fundamentais da esfera celeste, a eclíptica e o equador, e o ângulo constante entre eles. Já a figura 2 B aborda o analema.

**Figura 02 A-** Noção de projeção ortográfica **Figura 02 B-** Noção de projeção ortográfica (ANALEMAS)



Fonte: Kennedy (1992, p.09-10)

Já para trabalhar com corpos esféricos em sua própria superfície, Menelau de Alexandria desenvolveu uma técnica, conforme apresenta Kennedy (1992), porém por só ter uma versão em árabe, ele se baseia no Almagesto (I, 13). Essa técnica conhecida como Teorema de Menelau, tem os casos plano e esférico, e sua prova, dar-se pelo caso plano.

Por muito tempo, ou melhor, por alguns séculos falar do teorema de Menelau significava falar da trigonometria esférica, não significa que o mesmo não seja importante, é obvio que teve seu valor e poder, porém tímido para solução dos problemas da astronomia esférico (KENNEDY, 1992). Nesse sentido, observa-se a evolução da trigonometria e seu desenvolvimento, baseados em razões sociais, as quais permitiram a validação ou não de determinado conhecimento para aplicação social.

Ao observar as aplicações citadas acima, referentes a função corda, percebemos conforme traz Kennedy (1992) que é essencial duplicar o arco antes de utilizá-lo em uma tábua de cordas. Ele ainda afirma que é mais pertinente a existência de uma tábua na qual o arco original é uma variável independente, e que quando pensaram em calcular utilizando a metade da corda de um arco duplo, surgiu a função seno.

#### **O quarto marco histórico**

Ao pensar em calcular e usar a metade da corda de um arco duplo surgiu a função seno, a qual marca o **estágio 4**. Apesar de contribuições de diferentes ideias matemáticas, da Grécia, Babilônia entre outros, acredita-se que foram os indianos que inventaram a

função seno, Kennedy (1992) ainda afirma que foi na Índia que a tábua de senos mais antiga foi descoberta.

Os dados encontrados sobre a função seno inventados pelos indianos, foram baseados através de um compêndio de astronomia conforme afirma Kennedy, que era composto por “regras crípticas em versos redigidos em sânscrito, com poucas explicações e nenhuma prova” (1992, p.14), revisado muitas vezes, que é quase impossível determinar quais partes estão em suas palavras originais.

Os indianos construíram uma tábua de senos, sem auxílio da geometria, resultando em vinte quatro senos tabulados em ordem, a partir do primeiro seno, o qual consideraram sendo “a oitava parte dos minutos de uma secção zodiacal é chamada primeiro seno [ $S_1 = 30^\circ/8 = 1800'/8 = 225'$ ]” (KENEDDY, 1992, p.14). Observamos o raciocínio utilizado para construção os senos tabulados, e conseqüentemente para encontrar os senos subsequentes, o pensamento foi análogo, a partir de  $S_1$ , observem: “este acrescido da diferença obtida após subtraí-lo do quociente resultante de dividi-lo por si mesmo, é o segundo seno [ $S_2 = S_1 + (S_1 - S_1/S_1)$ ]” (KENEDDY, 1992, p.14).

A partir dos avanços nesses estudos relacionados a função seno, Kennedy (1992) afirma que os indianos astrônomos além de introduzir a função seno, eles avançaram intuitivamente em assuntos que forma denominados com o passar dos tempos em equações de diferenças e teoria da interpolação.

Destarte, a cada dia aumentava o número de pessoas que trabalhavam com a trigonometria, especificamente, a partir do século IX. Astrônomos da Índia a Espanha, que navegavam muito por diferentes partes dessa região, foram desenvolvendo a trigonometria, e começaram a utilizá-la para servir a corte contribuindo com previsões astrológicas (KENNEDY, 1992). Historicamente, os registros deixados por esses povos não foram dados uma devida importância nos tempos modernos, porém houve alguns estudos de alguns tratados. Kennedy (1992) ressalta que a função seno teve boa aceitação e preferencialmente a corda, e apresenta que a palavra seno, deriva de interpretações e traduções que tem haver com semicorda, dando sentido ao caminho histórico-epistemológico que levou até seu nascimento.

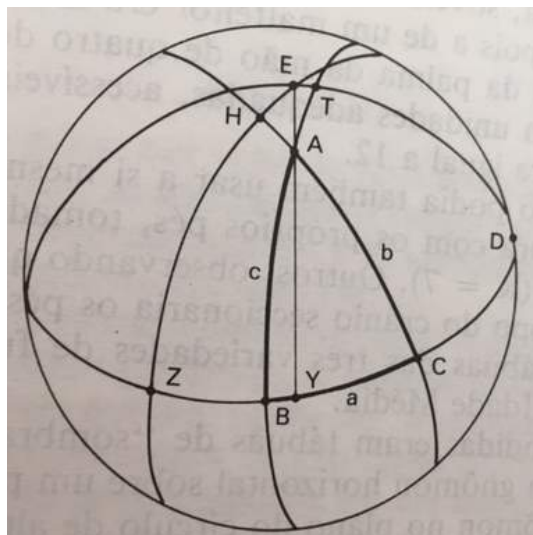
Em sua obra, Kennedy (1992) fala sobre a regar de quatro quantidades que foi relevante para marcar o estágio de transição de um cálculo que trabalhava com quadrilátero esférico, para trigonometria esférica, envolvendo os lados e ângulos de um triângulo esférico. Ele enuncia o teorema dizendo que: “num par de triângulos retângulo esféricos que tem um ângulo agudo ( $A, A'$ ) em comum ou igual, vale a seguinte relação:

$(\text{sen } a)/(\text{sen } a') = (\text{sen } c)/(\text{sen } c')$ . Kennedy ainda afirma que o teorema é transicional, pois os ângulos não intervêm. E a partir desses estudos se descobrem para os triângulos esféricos gerais a lei dos senos, a saber:

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } C}$$

Nesse teorema, utiliza-se explicitamente a função dos ângulos, fazendo parte da nova trigonometria. Logo abaixo, segue a figura 3 que mostra o problema astronômico que anteriormente foi resolvido utilizando os analemas (Figura 2 B) e também que pode ser resolvido pelo teorema de Meneleu, mas que agora já pode ser resolvido pela lei dos senos.

**Figura 3** – Projeção de um problema astronômico resolvido pela lei dos senos.



Fonte: Kennedy (1992)

Observamos novamente, que a astronomia está totalmente ligada a trigonometria, e que durante todo esse processo ambas caminharam de mãos dadas, e só no século XIII que ambas foram separadas, pois consideraram proveitosa essa separação, conforme indica Kennedy (1992). Mas uma vez ressaltando a razão de ser social para desenvolvimento do conceito matemático.

Esses estágios trabalhados até aqui está bastante atrelado a geometria, e sua evolução foi resultante de técnicas de cálculos e numéricas. E foi a partir do século IX que as tábuas de sombras horizontais, ou seja, sombras estendidas, eram utilizadas para mostrar “o comprimento da sombra projetado em um plano horizontal como uma função de altitude do Sol” (KENNEDY, 1992, p.22). Essas tábuas eram de cotangente de  $\theta$ , ou seja  $\text{cotg } \theta \equiv R \text{ cotg } \theta$ . Em seguida Kennedy (1992) apresenta as tábuas da sombra reversa conhecida como  $\text{tg } \theta$ , ou tangente de  $\theta$ . Logo após traz a hipotenusa do triângulo

representado pela sombra e a hipotenusa do triângulo representado pela sombra estendida que respectivamente são secante de  $\theta$  e cossecante de  $\theta$ . E por fim, afirma que ao final do século IX as funções trigonométricas já estavam sendo trabalhadas e suas identidades também, sendo 6 essas funções (seno, cosseno, cotangente, tangente, secante e cossecante).

Após esse desenvolvimento das funções, durante o período da Antiguidade e da Idade Média, e mesmo após as atividades terem centralizados na Europa, a linguagem ainda trabalhada era a linguagem comum, sem muito simbolismo. Na trigonometria, conforme Kennedy (1992) afirma, foi François Viète (1540-1603) que formalizou simbolicamente a trigonometria trabalhada na época por meio de notações matemáticas. Boyer (1974) destaca o problema de trissecção do ângulo resultava em uma equação cúbica, e partir desse resultado a trigonometria se tornou essencial para resolver equações de graus mais elevados.

Fonseca (2010) ressalta também que esses resultados permitiram que a trigonometria estimulasse os matemáticos durante o final do século XVI e início do século XVII, para que os mesmos publicassem esses resultados de Viète em seus livros textos.

E por fim, após a introdução aos símbolos na trigonometria, e com os avanços matemáticos a respeito de análise, com a invenção do cálculo infinitesimal como aborda Kennedy (1992), a trigonometria se deixa levar por essa corrente. E de instrumento de mensuração da geometria, passa a ser um conjunto de relações entre os números complexos. Esse processo se iniciou a partir da escrita de funções trigonométricas como séries infinitas realizadas por Isaac Newton ao fim do século XVII, o qual escreveu da seguinte forma, como aborda Kennedy (1992, p.27);

$$\text{Sen } x = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

e

$$\text{Cos } x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

E como ele já sabia também que

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

Observamos que Newton já começava a ver uma relação epistemológica da trigonometria com as funções exponenciais. E a partir dessas evoluções, e com o reconhecimento dos números imaginários, Kennedy (1992, p.27) mostra as contribuições

de Leonhard Euler em 1740 ao escrever  $\sin^{-1} x = \lim_{\theta \rightarrow x} \theta$  e definiu as funções trigonométricas como  $\sin^{-1} x = \theta$  e  $\cos^{-1} x = \theta$ . E ainda afirma que todas as identidades conectadas as funções podem derivar dessas definições.

De acordo com a análise histórico-epistemológica aqui apresentada, observamos quatro estágios de desenvolvimento do campo trigonométrico que conta do avanço da trigonometria e funções trigonométricas. E a partir dos mesmos notamos a presença forte em todo processo de desenvolvimento do que Chevallard (1992) chama de razão social, a qual vem sendo perdida no ensino de matemática atual.

### Considerações finais

Com o objetivo de compreender o processo evolutivo das funções seno e cosseno, e detectar, caso exista, possíveis incompletudes que venham influenciar no ensino atual dessas funções, realizamos a presente análise. E notamos que durante todo o processo evolutivo do campo trigonométrico a existência de técnicas que venha a evoluir com o passar dos tempos, mostrando a sua ligação fortíssima à astronomia.

Esse estudo se faz de grande relevância para compreensão da essência da trigonometria, em especial das funções seno e cosseno, e nos ajudando a inferir sobre os possíveis motivos que levam a complexidade atual nos estudos com esse tema.

No intuito de propor um percurso de estudo e pesquisa para o ensino das funções seno e cosseno, a partir do uso do *software* geogebra e resgatando a razão social dessas funções, apresento aqui na figura 4, o quadro resumo feito por Fonseca (2015), baseado em Kennedy (1992) no intuito de destacar de forma resumida os pontos chaves dessa análise histórica-epistemológica, a fim de compreendermos a essência dessa evolução, bem como as possíveis incompletudes ou rupturas existentes durante a transposição realizada desse período para nossa época atual.

**FIGURA4:** Quadro do mapeamento histórico-epistemológico a partir de Kennedy



Períodos Históricos				
	Pré-história	Idade Antiga	Idade Média	Idade Moderna
<b>Motivação</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Mudanças climáticas;</li> <li>- Plantio;</li> <li>- Compreensão do tempo;</li> <li>- Movimento dos astros celestes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- As fases da Lua;</li> <li>- Os pontos cardeais;</li> <li>- As estações do ano;</li> <li>- Calendário astrológico;</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Mudança de técnica (IV ou V d. C.);</li> <li>- Previsões astrológicas (IX d. C. até XV d. C.);</li> <li>- Separação da Trig. da Astr. (XIII d. C.);</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Simbolismo algébrico (XVI d. C.);</li> <li>- Invenção do Cálculo infinitesimal e descoberta do domínio complexo</li> </ul>
<b>Tarefa</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Calcular o comprimento de uma sombra.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Analisar as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano;</li> <li>- Medir distâncias, comprimentos e profundidades.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Resolver um triângulo;</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Transformar a linguagem verbal em linguagem algébrica;</li> <li>- Construir tábuas trigonométricas;</li> <li>- Calcular o sen 1' com treze casas decimais.</li> </ul>
<b>Objetivo</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Compreender o tempo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Compreender o dia e a noite (o aparecimento e desaparecimento dos corpos celestes).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Construir uma Trigonometria genuína;</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Contribuir para a invenção do cálculo infinitesimal;</li> </ul>
<b>Técnica</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tabulação de sequências numéricas que relacionavam comprimentos de sombras às horas do dia.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Resolução de figuras planas;</li> <li>- Resolução de figuras esféricas;</li> <li>- Utilização de analemas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Resolução de triângulos planos ou esféricos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Interações entre análise numérica e geométrica</li> </ul>
<b>Autor</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Iranianos, egípcios, indianos, gregos, chineses, babilônios e mesopotâmios.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Babilônios, mesopotâmios, egípcios, gregos, romanos, chineses e indianos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Indianos (IV ou V d. C.) e gregos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Europeus</li> </ul>
<b>Noção</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Medida de tempo;</li> <li>- Ângulos;</li> <li>- Triângulos;</li> <li>- Semelhança;</li> <li>- Proporcionalidade;</li> <li>- Esfera celeste.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Triângulos retângulos;</li> <li>- Trigonometria primitiva;</li> <li>- Relações trigonométricas;</li> <li>- Ângulo e medição de ângulos;</li> <li>- Trigonometria esférica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Relações métricas nos triângulos planos ou esféricos;</li> <li>- Noções de quantidades variáveis.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Razões trigonométricas;</li> <li>- Funções do ângulo (funções trigonométricas);</li> <li>- Séries infinitas;</li> </ul>
<b>Estágio</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Função Sombra.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Função Sombra;</li> <li>- Função Corda;</li> <li>- Função Esferográfica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Função Esferográfica;</li> <li>- Função Seno.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Função Seno.</li> </ul>

Fonte: Fonseca (2015)

De acordo com o quadro exposto na figura 4, observamos que a motivação para o desenvolvimento do campo trigonométrico vem atender razões sócias em diferentes períodos históricos, apenas na Idade Moderna que a razão se modifica. E analisando praxeologicamente, a tarefa que Fonseca (2015) expressa em seu quadro a partir dos conhecimentos de Kennedy, ratifica isso, ao mostrar que a relação social em ambas. E confirmando a necessidade de atender a razão social no processo evolutivo do campo trigonométrico, observamos que nos objetivos também aparece em destaque, em especial na Pré-história e Idade Antiga.

E baseado nesses estudos observamos a necessidade de resgatar no ensino das funções seno e cosseno, as motivações para que esse saber se aproxime dos discentes, de modo a diminuir a rejeição pelas funções trigonométricas.

### **Referências**

ALMOULOU, S. Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BOYER, C. B. **História da Matemática**: tradução: Elza Furtado Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

CHEVALLARD, Y. **Concepts fondamentaux de la didactique**: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1992.

COLONEZE, B.R.S. **Módulo de aprendizagem e treinamento de funções trigonométricas: fazendo o usoda tecnologia para a efetiva aprendizagem de funções trigonométricas. Com aplicação em eletrônica**. Rio de Janeiro-CEFET/RJ, 2012, 142 f. Dissertação (Mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2012.

COSTA, N.M.L., **Funções seno e cosseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do “mundo experimental” e do computador**. 250f. Dissertação (Mestrado em ensino da matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

KENNEDY, E. S. **História da trigonometria**. São Paulo: Atual, 1992. (Coleção Tópicos de História da Matemática para sala de aula; v. 5).

FONSECA, L. S. da. **Aprendizagem em trigonometria: obstáculos, sentidos e mobilizações**. São Cristóvão. Editora UFS, 2010.

FONSECA, L. S. da. **Um estudo sobre o Ensino de Funções Trigonométricas no Ensino Médio e no Ensino Superior no Brasil e França**. 2015, 1v. 495p. Tese de Doutorado. Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo (SP).

OECD. PISA 2015. Programme for International Student Assessment (PISA) Results From PISA 2015. **Publishing**, 2016. Disponível em: <https://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Brazil.pdf>

PEDROSO, Leonor Wierzynski. **Uma Proposta de Ensino da Trigonometria com Uso do Software GeoGebra**. Porto Alegre: UFRGS, 2012. 271 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.





Núcleo Interdisciplinar de Pesquisa, Ensino e Didática das Ciências, Matemática e Tecnologia

III SEMINÁRIO DO NIPEDICMT  
CONTRIBUIÇÕES DA FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS PARA AS  
PESQUISAS EM DIDÁTICA DAS CIÊNCIAS

**UMA ANÁLISE DAS DIMENSÕES ECONÔMICA E ECOLÓGICA DO ENSINO DE MATEMÁTICA PARA CRIANÇAS SURDAS E OS PROBLEMAS DA APRENDIZAGEM CENTRADOS NA DIFERENÇA ENTRE A LÍNGUA MATERNA E A LÍNGUA ESCOLAR.**

*Bartira Fernandes Teixeira<sup>15</sup>*

**Resumo:** Neste trabalho propomos discutir o ensino da Matemática para crianças surdas a partir da análise de duas das dimensões (econômica e ecológica) do problema didático aqui posto, qual seja, a construção da noção de número por estes alunos. As aulas ministradas a alunos surdos e em Libras terão especial atenção em face da singularidade destes sujeitos. Trazendo contribuições da História e da Filosofia das Ciências para esta pesquisa, a partir de um viés interculturalista (apresentado como uma alternativa às concepções tradicionais de ciência e educação), centraremos nossa análise sobretudo nos problemas que podem advir da diferença existente entre a língua materna dos estudantes surdos e a língua escolar (no caso brasileiro, entre a Língua Brasileira de Sinais e a Língua Portuguesa). Os números naturais, especialmente o processo de construção desta noção, serão o objeto matemático a ser observado em aulas dos anos iniciais do ensino fundamental, dada a importância do seu conceito e da sua compreensão. Para embasar nossa investigação, percorreremos as principais teorias da Didática: a Teoria Antropológica do Didático e a Teoria das Situações Didáticas compõem nosso quadro teórico básico; Raymond Duval com os Registros de Representação Semiótica, Serge Leblanc e Alan Mercier serão nossos referenciais. Os resultados iniciais das análises das dimensões do nosso problema didático permitem-nos concluir, ainda que previamente, que o ensino do objeto matemático, desvinculado do aprendizado da língua natural, não atende, ao menos por enquanto, a singularidade dos sujeitos aqui considerados.

**Palavras Chaves:** Interculturalismo. Bilinguismo. Didática.

---

<sup>15</sup> Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências – UFBA/UEFS, Pós-Graduanda em Língua Brasileira de Sinais pela Faculdade Dom Pedro II, Salvador, BA. bartiraft@yahoo.com.br

## INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA BILÍNGUE

O professor de Matemática atualmente precisa ser um profissional extremamente crítico e criativo. Essa criatividade deve manifestar-se desde o primeiro momento quando do ensino dos números naturais para as crianças e, mais ainda, frente ao atual cenário da sala de aula dita inclusiva, onde professores se deparam com alunos com características especiais e que exigem uma atenção mais direcionada. Ao redor do mundo, vários professores se dedicam ao ensino destes alunos: crianças cegas, com Síndrome de Down, com Transtorno do Espectro autista, surdas ou com outras necessidades específicas. E aos educadores matemáticos não incumbe a tarefa de fazer com que seus alunos amem a Matemática; cabe-lhes sim, a missão de fazê-los *saber* matemática, o que é bem mais exigente (CHEVALLARD, 2006).

Especificamente em relação à surdez, dados do último censo realizado em 2010 pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística-IBGE indicam que cerca de 9,7 milhões de brasileiros possuem deficiência auditiva (DA), representando 5,1% da população brasileira.

Será que o aluno surdo, titular do direito subjetivo de aprender matemática, possui educação plena capaz de atender à sua especial necessidade? A Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Lei nº 13.146/2015) garante no art. 27 que:

A educação constitui direito da pessoa com deficiência, assegurado sistema educacional inclusivo em todos os níveis e aprendizado ao longo de toda a vida, de forma a alcançar o máximo desenvolvimento possível de seus talentos e habilidades físicas, sensoriais, intelectuais e sociais, segundo suas características, interesses e necessidades de aprendizagem.

Os incisos I e IV do referido artigo determinam que incumbe ao poder público assegurar, criar, desenvolver, implementar, incentivar, acompanhar e avaliar:

I - **sistema educacional inclusivo** em todos os níveis e modalidades, bem como o aprendizado ao longo de toda a vida;  
[...]

IV - **oferta de educação bilíngue, em Libras como primeira língua e na modalidade escrita da língua portuguesa como segunda língua, em escolas e classes bilíngues e em escolas inclusivas;** [...]

Nota-se que, apesar de haver na prática uma confusão entre o que seja *educação inclusiva* e *educação bilíngue*, a lei minuciosamente as diferenciou e a educação bilíngue ainda não é ofertada na maioria das instituições do país. Garantir matrícula em escola não é

garantir a melhor educação. O direito de estar em todos os lugares não pode ser maior do que o direito de estar no melhor lugar. A luta é formar os professores certos para o aluno certo.

Reforçando o quanto determinado na Lei nº 13.146/2015, o Decreto nº 5.626 prevê que as instituições federais de ensino responsáveis pela educação básica devem garantir a inclusão de alunos surdos ou com deficiência auditiva por meio da organização de escolas e classes de educação bilíngue, abertas a alunos surdos e ouvintes, *com professores bilíngues na educação infantil e nos anos iniciais do ensino fundamental*.

O citado Decreto garante também escolas bilíngues ou escolas comuns da rede regular de ensino, abertas a alunos surdos e ouvintes, para os anos finais do ensino fundamental, ensino médio ou educação profissional, com docentes das diferentes áreas do conhecimento, cientes da singularidade linguística dos alunos surdos, bem como com a presença de tradutores e intérpretes de Libras - Língua Portuguesa.

Da exegese das disposições legais referenciadas podemos concluir que não se aborda o tema da presença do intérprete na educação infantil, tampouco nos anos iniciais do ensino fundamental. Qual seria a função do intérprete se a criança não sabe a Língua?

A *Educação Bilíngue* vai mais além do que a simples inclusão. Os alunos surdos necessitam de um ambiente linguístico natural para a aquisição da Língua de Sinais e o aprendizado natural da Matemática. Necessita-se de projetos para a aquisição desta primeira língua e para o aprendizado desta disciplina. E aqui reside uma grande e infundável barreira: a língua dos surdos muitas vezes não é a língua dos professores.

Sobre esta questão, traremos mais à frente contribuições da História e da Filosofia das Ciências para o desenvolvimento desta investigação, fundamentada na Didática da Matemática. Sobretudo quanto ao estudo sobre *ciência intercultural (ou multicultural)*, que se relaciona à presença em salas de aula, de alunos de diferentes culturas e origem. Educação intercultural significa realização de mudanças e reformas necessárias nos sistemas educativos a fim de que as minorias (neste caso, a minoria surda) tenham acesso ao ensino de ciências e matemática.

O professor Marcílio de Carvalho Vasconcelos, da Universidade Estadual de Feira de Santana, surdo, lista os principais entraves que entende existentes na Educação Matemática de surdos: poucos professores de Matemática são surdos, o que implica a falta de sinais específicos de Matemática em Libras e os professores surdos continuam usando as metodologias inicialmente criadas para os ouvintes.

Desta forma, falar em *ensino de matemática bilíngue* não significa apenas que todos os professores de Matemática devam ser proficientes em Libras. Não significa apenas professores bilíngues. Significa um projeto diferente para alunos surdos construindo um ambiente linguístico natural; calcado na visualidade; em tecnologias da informação visuais; com materiais pedagógicos específicos; contemplando a diversidade e propondo uma transformação nas escolas.

Daí a importância da construção, análise, experimentação e ressignificação das práticas docentes, aqui entendidas como o processo contínuo de preparação, sem início, meio e fim, fonte e medida do conhecimento para alunos e professores, abrangendo tudo que ocorre antes, durante e depois da classe<sup>16</sup> (FARIAS, 2010).

A aula de Matemática deve contemplar alunos surdos e alunos ouvintes. A aula de Matemática em Libras não contempla os alunos ouvintes assim como a aula de Matemática em Língua Portuguesa não é direcionada aos alunos surdos. Existe uma

aula de números naturais que contemple ambos? Essa é a nossa questão e a nossa hipótese é que o professor é capaz de ensinar números naturais para surdos e ouvintes, de forma efetiva e simultânea.

Nossa investigação se fundamenta na Didática da Matemática, em especial nos estudos de Guy Brousseau (*Teoria das Situações Didáticas*) e de Yves Chevallard (*Teoria Antropológica do Didático e da Transposição Didática*) sendo este o nosso quadro teórico. Como referencial, nos apoiaremos, em outra fase da investigação, em Serge Leblanc e Alan Mercier (na autoconfrontação para produção de dados), sem perder de vista os *Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval*, já que “o surdo é aquele que vê”.

## REVISÃO DE LITERATURA E DISCUSSÃO DA TEORIA

Em artigo intitulado *Passos em direção a uma nova epistemologia na Educação Matemática*, Yves Chevallard sustenta que, para ele, Didática deveria ser definida como a ciência da difusão do conhecimento. Fazer didática seria, portanto, fazer pesquisa, produzir peças de conhecimento e organizar estas peças em termos de 'corpos de conhecimento'. A

---

<sup>16</sup> A prática é definida nos dicionários como "a atividade que visa aplicar uma teoria que busca resultados concretos, que implementa as regras, os princípios de uma determinada atividade, uma arte ou técnica" (LEXILOGOS 2002-2009). Consideramos a análise das práticas de como um conceito polissêmico e não como uma moda passageira, porque há diferentes tipos de análise de prática. Além disso, a expressão não está unificada. Há "a análise das práticas", "análise de práticas" e "análise da prática" (FARIAS, 2010, p.104)



ideia por trás da Didática seria a de que alguém tenta fazer algo para que outro alguém aprenda algo.

Ao analisar as práticas docentes, estaremos diante de *praxeologias*, estudaremos a ação e a conduta humanas na intenção de responder às perguntas: como fazem, o quê fazem, por que fazem? Esta é a abordagem antropológica da Didática, na qual todas as formas de atividade humana devem resultar da inserção em um jogo de praxeologias. Daí a justificativa para utilização do termo “antropológico”, já que a *Teoria Antropológica do Didático* situa a atividade matemática e seu estudo dentro do conjunto das atividades humanas (ALMOLOUD, 2007, p.111). Estas atividades humanas serão objeto do nosso olhar atento e da nossa observação clínica. Como observa Chevallard (1999):

El punto crucial al respecto, del que se descubrirán poco a poco las implicaciones, es que la TAD sitúa la actividad matemática, y en consecuencia la actividad del estudio en matemáticas, e nel conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales. [...] El postulado de base de la TAD es contrario a esta visión particularista del mundo social: se admite em efecto que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse com un modelo único, que se resume aqui com la palabra de *praxeología*.

Estudaremos o processo de transposição minuciosamente apontado por Chevallard (2006). Levando novamente em consideração a noção chave de *praxeologia*, cabe a pergunta: A transposição didática tem dado conta da realidade inclusiva/bílingue das escolas? Quais as praxeologias necessárias para o efetivo ensino de números naturais às crianças surdas? O Modelo Epistemológico Dominante contempla o bilinguismo?

Neste ponto, faremos uma abordagem de aspectos fundamentais da *Teoria das Situações Didáticas* que trata de formas de apresentação do conteúdo matemático a alunos, possibilitando uma melhor compreensão do fenômeno da aprendizagem matemática. Sobre o assunto ALMOLOUD (2007, p.31) ressalta:

A teoria das situações didáticas foi desenvolvida por Guy Brousseau no intuito de modelar o processo de ensino aprendizagem dos conceitos matemáticos. [...] o objetivo da teoria das situações é caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos. Essa modificação é característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimento, da ocorrência de uma aprendizagem significativa.

Por sua vez, para estudar as situações didáticas adequadas, as formas de apresentação e a aquisição de conhecimentos matemáticos pelos alunos, é preciso recorrer à noção de representação. “Não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma

pessoa, sem o auxílio de uma representação” (DAMM, 2015, p. 169). Como a matemática trabalha com objetos abstratos, não sendo muitos desses objetos acessíveis à percepção, necessita-se, para sua apreensão, de uma representação (DAMM, 2015, p.170).

Neste caso, as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos é bastante significativa, pois permite a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático.

A noção de *Registros de Representação Semiótica* não pode ser abandonada ao tratarmos do aluno surdo já que “A língua constitui o primeiro registro de representação semiótica para o funcionamento do pensamento” (DUVAL, 2011, p.83) e *o surdo é aquele que vê*. Sendo a Libras a língua natural do sujeito surdo, deve a aula de matemática ser ministrada em Libras para que esse sujeito seja capaz de compreender os objetos matemáticos? Às aulas ministradas em Libras dedicaremos especial atenção.

D'AMORE (2017, p. 249) traz brilhantes considerações sobre a linguagem matemática na sala de aula e ressalta:

O ensino é comunicação e um de seus objetivos é o de favorecer a aprendizagem dos alunos; em primeiro lugar, então, quem comunica deve fazê-lo de maneira tal que a linguagem utilizada não seja ela própria uma fonte de obstáculos à compreensão; a solução poderia parecer banal: bastaria evitar com os alunos aquela linguagem específica: toda comunicação deveria acontecer na língua comum (com a expressão “língua comum” estou me referindo ao que outros chamam de língua materna) [...].

Resultados de trabalhos divulgados em revistas específicas de Didática das ciências experimentais (*Science Education; Journal of Research in Science Teaching; Science & Education*, entre outras) trazidos por HERNÁNDEZ, MANUEL y ENRIQUE MIRÓN (2004), apontam que um dos maiores problemas de aprendizagem de ciências (o que não nos impede de, analogicamente, transpor para a matemática) está centrado na língua, *especialmente na diferença existente entre a língua materna e a língua escolar*.

Esta diferença é um claro campo de preocupação. Ainda que a importância da língua para a aprendizagem não esteja necessariamente ligada ao contexto multicultural (entendido como a incorporação de várias possibilidades para a compreensão e produção do conhecimento por pessoas de diferentes origens e culturas) a perspectiva sociocultural integra a problemática posta. A língua tem sido identificada como uma das principais causas no fracasso escolar nas classes de ciências. Se o aluno é surdo, e a Libras é a língua natural deste

sujeito, pode a noção de número ser ministrada às crianças surdas em Língua Portuguesa? Questões como esta objetivamos responder em nossa investigação.

## **ANÁLISES PRÉVIAS: AS DIMENSÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO**

Ainda em fase de análise *a priori*, esta proposta de pesquisa fora apresentada como projeto de investigação na seleção do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências na Universidade Federal da Bahia, sendo estabelecido aqui um recorte da referida proposta, sobretudo quanto ao seu aspecto linguístico. A autora, mestrandanda do referido Programa e Pós-Graduanda em LIBRAS pela Universidade Dom Pedro II, em Salvador, questiona, como professora de Matemática, como é o aprendizado dos números naturais pelas crianças surdas, já que este é um conceito elementar da Matemática, dependente sobremaneira do aprendizado da língua materna da criança. Este é o nosso problema didático. Como sucede em todo problema didático esse pode ser dissecado em três dimensões (a *dimensão epistemológica*, a *dimensão econômica* e por fim, a *dimensão ecológica*).

Quanto à análise *econômica*, já tendo sido apresentados elementos no início deste texto, esta reflete a descrição do modelo epistemológico dominante (MED), o que em outras palavras significa descrever *como* este problema didático está posto nas escolas do ensino fundamental. Nesse caso, com base no que já descrevemos anteriormente, nossa hipótese é que o ensino das noções elementares de números (contagem, noções de quantidade, etc.), vinculadas ao aprendizado da língua natural, não atende, ao menos por enquanto, a singularidade dos sujeitos aqui considerados.

Ato contínuo, conhecer aspectos da dimensão *ecológica* do referido problema didático corrobora, em uma fase posterior da investigação, para o planejamento e construção de um modelo epistemológico de referência (MER) de um trabalho voltado ao ensino dos números naturais para crianças surdas. Analisar a dimensão ecológica nesse contexto significa estudar as condições e restrições para o ensino do objeto matemático números naturais e suas noções primárias, nos anos iniciais em escolas de educação especial. Significa analisar por que determinada instituição é como é, quais as condições se requer para modificá-la em determinada direção. A ecologia do problema didático pode ser formulada dizendo-se que, do ponto de vista da Teoria Antropológica do Didático, um dos objetivos essenciais da didática da matemática é determinar claramente quais as condições e restrições que influenciam no ato de ensinar (BARQUERO, BOSCH, GASCÓN, 2013). O estudo da ecologia do saber, nos permite promover alterações na proposta a ser levada para experimentação, que nesse caso,

visa experimentação de sequências didáticas com crianças com necessidades educacionais especiais.

O livro *Língua de Sinais Instrumentos de Avaliação*, escrito pelas professoras Ronice Müller Quadros e Carina Rabello Cruz, traz importante análise sobre a aquisição e do desenvolvimento da linguagem na criança surda.

Da mesma forma que as diferenças se manifestam nas pessoas ouvintes (afinal, ninguém é igual a ninguém) os surdos também possuem suas individualidades e, assim, a aquisição de uma língua, qualquer que seja ela, dependerá da análise de inúmeras circunstâncias que influenciarão neste processo. Todos os surdos adquirem a linguagem da mesma forma? Estão todos os surdos inseridos no mesmo contexto linguístico?

Inicialmente, destacam as autoras que a criança adquire a linguagem na interação com as pessoas à sua volta, ouvindo (ou vendo) a (ou as) línguas que estão sendo usadas. Ou seja, adquire-se a linguagem quando se dispõe de oportunidades naturais para tal aquisição.

Tratando especificamente da Língua de Sinais, estudos comprovam que tal modalidade linguística possui as mesmas restrições que as línguas faladas, pois assim como as línguas orais-auditivas, as línguas de sinais apresentam análises em todos os níveis linguísticos (fonológico, morfológico, sintático, semântico e pragmático).

Todavia, como foi dito acima, cada sujeito surdo possui sua identidade, e a aquisição da língua ocorrerá de maneira completamente distinta a depender do contexto em que o sujeito está inserido. É dizer, surdos, filhos de pais surdos, então inseridos em um contexto linguístico distinto dos surdos filhos de pais ouvintes ou dos surdos filhos de pai surdo e mãe ouvinte, por exemplo. As crianças surdas, filhas de pais surdos, têm acesso à língua de sinais em iguais condições às quais os ouvintes têm acesso à língua oral-auditiva, ou seja, naturalmente.

Assim, o acesso ao objeto matemático ‘números naturais’ também dependerá dessas especificidades das crianças surdas? A criança que sabe Libras aprenderá da mesma forma que a criança surda que não sabe a língua?

Fora, portanto, apresentada uma proposta para o ensino fundamental bem como para a formação continuada dos professores, emoldurado pela *Antropologia da Didática*, por estudar a ação humana de ensinar e suas praxeologias. Quanto ao objeto de estudo Números Naturais, citamos trecho do artigo Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino de Bruno D'Amore (2007) em que ressalta:

É bem sabido que Guy Brousseau estudou por quase três décadas [...] a maneira pela qual se aprendem os números naturais e sua estrutura. Nos anos 60 (e, em alguns casos, mesmo depois) predominavam algumas ideias que hoje consideramos

curiosas, baseadas em diversas “teorias” sobre a aprendizagem dos números naturais por crianças do início da escola primária (Na Itália, a escola primária corresponde ao primeiro ciclo do Ensino Fundamental no Brasil).

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Assim, o conhecimento dos números naturais é indispensável para a compreensão de outros conceitos matemáticos, não podendo figurar como *obstáculo epistemológico* a estes demais aprendizados.

A análise inicial aqui realizada, qual seja, a verificação de como o ensino do objeto matemático está posto nas escolas atualmente, como as noções de números naturais são ensinadas para as crianças surdas, avaliando se, de fato, está sendo possibilitado o aprendizado, permite-nos uma conclusão inicial de que não está sendo considerada a singularidade das crianças surdas na maioria das escolas regulares do ensino fundamental.

Conteúdos conceituais como, por exemplo, reconhecimento de números no contexto diário; utilização de diferentes estratégias para quantificar elementos de uma coleção, contagem, pareamento, estimativa e correspondência de agrupamentos; identificar números em situações que envolvem contagens e medidas; comparação e ordenação de coleções pela quantidade de elementos e ordenação de grandezas pelo aspecto da medida; formulação de hipóteses sobre a grandeza numérica, pela identificação da quantidade de algarismos e da posição ocupada por eles na escrita numérica; leitura, escrita, comparação e ordenação de números familiares ou frequentes, não são aprendidos se ensinados em língua portuguesa para crianças cuja língua materna é a Libras.

Por todo o exposto, essa investigação apresenta caminhos para a reconstrução de praxeologias no estudo/ensino bilíngue da Matemática.

## REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BARQUERO, Berta, BOSCH, Marianna, GASCÓN, Josep. **Lastres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática**: 2013.

BROUSSEAU, G. **Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques**: 1986, p. 33-116

CHEVALLARD, Yves. **Steps Towards a New Epistemology in Mathematics Education**.(IUFM d’Aix-Marseille, France, 2006).

\_\_\_\_\_. **El análisis de las prácticas docentes em la teoría antropológica de lo didáctico**. Recherches em Didactique des Mathématiques. Vol. 19, nº 2, 1999.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semiótica**. 1ed. São Paulo: PROEM, 2011.

FARIAS, L.M.S. **Étude des interrelations entre les domaines numérique, algébrique et géométrique dans l'enseignement des mathématiques au secondaire: Une analyse des pratiques enseignantes en classes de troisième et de seconde**. Thèse de Doctorat, Université de Montpellier 2, France, 2010.

FERNANDES, Eulália (org.). **Surdez e Bilinguismo**. Porto Alegre: Mediação, 2010. (3. ed. rev. e atual. Ortog.)

HERNÁNDEZ, Cabo, MANUEL, José, ENRIQUE MIRÓN, Carmen. Hacia um concepto de ciencia intercultural. *Enseñanza de las ciencias*, 2004, 22 (1), p.137-146.

MERCIER, Alain; BUTY, Christian. **Évaluer et comprendre les effets de l'enseignement sur les apprentissages des élèves: problématiques et méthodes didactiques des mathématiques et des sciences**. In: *Revue française de pédagogie*, volume 148, 2004, pp.47-59.

SKLIAR, Carlos (org.). **A Surdez: um olhar sobre a diferença**. Porto Alegre: Mediação, 2010.

SÁ, Nídia Regina Limeira de. **Cultura, Poder e Educação de Surdos**. São Paulo: Paulinas, 2006.

VASCONCELOS, Marcílio de Carvalho. **A experiência no ensino e aprendizagem matemática para alunos surdos**. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, BA: Via Litterarum: Sociedade Brasileira de Educação matemática, 2010.



Núcleo Interdisciplinar de Pesquisa, Ensino e Didática das Ciências, Matemática e Tecnologia

III SEMINÁRIO DO NIPEDICMT  
CONTRIBUIÇÕES DA FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS PARA AS  
PESQUISAS EM DIDÁTICA DAS CIÊNCIAS

**ASPECTOS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICOS O CONCEITO DE LIMITES NO  
ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**

*Osnildo Andrade Carvalho*<sup>17</sup>

**Resumo:**

Este é um pequeno recorte do trabalho que vem sendo desenvolvido na tese intitulada: Análises de práticas em avaliações formativas com suporte informático em aulas de cálculo diferencial e integral. O ensino de cálculo é tido por muitos como excludente e de difícil assimilação, por apresentar altos índices de reprovação e evasão. Com o objetivo de contribuir para o ensino e aprendizado deste componente curricular, traremos uma revisão bibliográfica dos aspectos filosóficos e históricos do conceito de limites de uma função de uma variável real, evidenciando os obstáculos epistemológicos e didáticos. Tal ação visa promover a aproximação entre a didática da matemática e a história e filosofia do cálculo e, mostrar os pensamentos dos matemáticos que contribuíram para o seu desenvolvimento. Neste sentido, nossa análise nos fez perceber que existem obstáculos que influenciam no ensino e aprendizagem do conceito de limites, destacamos os obstáculos epistemológicos e didáticos da matemática e, conhecê-los permite entender a ruptura epistemológica dos saberes apresentados em sala de aula, além das obstruções que provocam o entendimento de diversos conteúdos necessários para que ocorra a compreensão do cálculo infinitesimal. Dessa maneira este texto pretende estimular a reflexão a respeito desta realidade no ensino de cálculo promovendo o compartilhamento de ideias científicas além de contribuir para um olhar diferente para este objeto matemático.

**Palavras-chave:** História, Filosofia, Obstáculos epistemológicos, obstáculos didáticos, Cálculo diferencial e integral.

**1 - Introdução**

A didática da matemática, área do conhecimento preocupada com o ensino e aprendizagem da matemática, vem aprofundando as discussões e pesquisas nos diversos níveis de ensino, seja da educação infantil a graduação. Respalhada em teorias consolidadas, tem trazido contribuições significativas para a comunidade acadêmica, tanto para professores em formação inicial quanto para professores em exercícios.

---

<sup>17</sup> Mestre em Matemática, aluno regular do doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências – UFBA, professor efetivo do IFBA, *campus* Feira de Santana, [osnildocarvalho@ifba.edu.br](mailto:osnildocarvalho@ifba.edu.br).

Neste contexto, inserir a pesquisa no nível superior, mais especificamente o ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral<sup>18</sup>, pode trazer contribuições importantes para entender a complexidade e as nuances de tratar deste importante componente curricular, presente nos diversos cursos como engenharias, ciências da terra e áreas tecnológica. Assim, aproximar os professores do nível superior nestas discussões é um passo importante.

Para compreender o conceito de derivadas e de integrais, temos como base o conceito de limites, o entendimento deste, é de fundamental importância para o estudante possuir um desenvolvimento satisfatório no curso de cálculo. Devido a isto diversos pesquisadores em educação matemática tem se dedicado às investigações de obstáculos ligados a essa noção (CELESTINO, 2008).

As dificuldades em compreensão das definições e teoremas apresentados no curso de cálculo, normalmente tem origem na formação histórica do conceito, como também na abordagem na sala de aula. Isto leva a nos remeter as barreiras na compreensão das ideias do cálculo infinitesimal, que se apresenta através de obstáculos, destacaremos os epistemológicos e didáticos (BROUSSEAU, 1983).

Os obstáculos epistemológicos possuem um papel importante no desenvolvimento histórico do conhecimento científico e tem sua rejeição integrada de forma explícita ao saber ensinado e aprendido. Enquanto os obstáculos didáticos são aqueles que dependem do processo educativo, tendo como origem na escolha nas estratégias de ensino (ALMOULOU, 2007). A importância de conhecer esses processos ajuda o professor entender as dificuldades dos estudantes ligados diretamente aos conceitos de um determinado saber trabalhado em sala de aula.

Nesta revisão bibliográfica, buscaremos trazer uma síntese dos obstáculos que influenciam na aprendizagem e sua ligação no contexto histórico no ensino de Cálculo Diferencial e Integral. A intenção é provocar uma reflexão do conceito de limites no curso de cálculo diferencial e Integral, oferecendo um aporte para os interessados neste tema.

A partir desta análise, pretendemos despertar para um olhar na construção do conhecimento e entender a existência de possíveis erros cometidos pelos estudantes para compreensão do objeto, limites de funções reais no curso de Cálculo, fomentando ações futuras no ensino de Cálculo em diversos cursos de graduação.

## **2 - Ideias iniciais do Cálculo Infinitesimal**

De acordo Boyer (1992), o cálculo no sentido mais formal foi moldado no século XVII de nossa era; apesar de que, as questões terem sido colocadas mais de dezessete séculos antes. Os problemas de mensuração retilínea e curvilínea pertencem ao cálculo. Encontrados nos papiros egípcios e tábuas cuneiformes babilônicas; faltando amadurecimento matemático

---

<sup>18</sup> Também conhecido como Cálculo Infinitesimal, Cálculo de funções de uma variável ou Cálculo I.



como distinção definida entre resultados exatos e aqueles apenas aproximados e as relações com a lógica dedutiva não estavam explicitamente reveladas.

É de provocar uma certa curiosidade, que o desenvolvimento do cálculo. Seguiu a ordem contrária à ordem dos livros textos ou dos cursos atuais sobre o cálculo; pois surgiu primeiro o cálculo integral e somente muito tempo mais tarde o cálculo diferencial. A evolução das integrais teve origem nos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. Enquanto as derivadas, com criação bem posterior, originou-se de problemas sobre retas tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Em seguida, constatou-se que as duas operações, tanto de diferenciação e integração, tem uma ligação direta, sendo uma operação inversa da outra (EVES, 2004).

O conceito de Cálculo Diferencial integral, começou a ser desenvolvido na Grécia por volta do século V a.C. Mas, apenas no século XVII, é que houve grande parte do seu desenvolvimento, juntamente com as ciências exatas, a começar com a Astronomia, estendendo-se à Mecânica, às demais ciências físicas e à Engenharia (ÁVILA, 2003). O filósofo Zenão de Eléia (450 a. C.), propôs alguns paradoxos que influenciaram as ideias iniciais do Cálculo, entre eles:

A dicotomia: Se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim, por diante, *ad infinitum*. Segue-se, então que o movimento jamais começará. (EVES, 2004).

A flecha: se o tempo é formado por instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha em movimento está sempre parada, posto que em cada instante ela está numa posição fixa. Sendo isso verdadeiro em cada instante, segue-se que a flecha jamais se move. (EVES, 2004).

Esses paradoxos, desafiam as seguintes ideias intuitivas do senso comum: a soma de um número infinito de quantidades positivas é infinitamente grande, ainda que cada uma delas seja muitíssima pequena como envolve em a nossa do infinito, intrigaram muito matemáticos

no entendimento destas questões  $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = \infty$  e de que a soma de um número finito ou infinito de quantidade de dimensão zero é zero ( $n \times 0 = 0$  e  $\infty \times 0 = 0$ ), assim eles excluíram os infinitésimos da geometria demonstrativa grega.

As ideias iniciais da história do cálculo se basearam no cálculo de áreas, volumes e comprimento de arcos. Diante disto, inicialmente temos a questão da quadratura do círculo, atribuída por Antífon, o Sofista (c. 430 a. C.), a sua ideia consistia em sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito num círculo, até exaurir a diferença entre o círculo e o polígono ao final. É como ser capaz de construir um quadrado de área igual à de qualquer polígono, seria então possível construir um quadrado de área igual à do círculo. A crítica que imediatamente se levantou contra esse argumento sustentava-se no princípio de que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente e que, assim, o processo de Antífon

jamais esgotaria a área do círculo. Não obstante, a corajosa abordagem de Antífon continha o embrionário do famoso método de exaustão grego.

Seguindo, temos o método da exaustão de Eudoxo (c. 370 a. C.), que pode ser considerado como a resposta da escola platônica aos paradoxos de Zenão. Esse método supõe que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e se baseia na afirmação:

Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie. (EVES, 2004).

O método da exaustão, foi utilizado por Eudoxo desmonstrar o seguinte teorema: o volume da pirâmide como a terça parte do volume do prisma de mesma base e altura. Embora Demócrito (410 a.C) tinha conhecimento deste teorema dificilmente o demonstrou rigorosamente.

Essas ideias baseiam na noção de infinito, importantes para construção do conceito de limites. Apesar de ser direta até mesmo intuitiva para os matemáticos. Entretanto os leigos e os estudantes não compreendem de forma tranquila esta noção, muitas das vezes por não compreender a noção de variável (POMMER, 2016), ou mesmo o conceito de funções (SEGADAS, 2016), relações entre as representações numéricas, algébricas e geométricas (NAG) (GRANDE; PIRES, 2016), (FARIAS; PIRES 2011), (FARIAS, 2010) relações aritméticas e algébricas de grandezas (ALVARENGA; SAMPAIO, 2016) e até a falta de compreensão das propriedades dos números reais (SILVA; PENTEADO, 2009). O que pode se apresentar como um obstáculo para aprendizagem. Diante disto iremos apresentar as ideias de obstáculos.

### **3 - Obstáculos epistemológicos e didáticos**

Para estudar o conceito de um objeto matemático, requer um olhar sobre a palavra conceito que de acordo D'Amore (2007), o conceito “é a própria essência das coisas e, portanto, sua essência necessária (isso porque as coisas só podem ser como são)” ou “é o *signo* do objeto e, portanto, se encontra com ele numa relação de significação”. Assim, para a aprendizagem tem-se um problema que parece essencial, aprender a “manipular” conceitos.

A aprendizagem se dá por adaptação ao meio e através de rupturas cognitivas, assimilação e acomodação de imagens e conceitos, formação de modelos, modificação de modelos intuitos e aceitação de concepções. Para que isso ocorra, é pertinente que ocorram ideias transitórias, apesar de que essas ideias possam persistir, mesmo que tente superá-las. Então surgem os obstáculos, sendo necessários conhece-los para fazer as rupturas necessárias. Ainda segundo D'Amore (2007),

Pode-se dizer que um obstáculo é uma ideia que, no momento da formação do conceito, foi eficaz para os problemas anteriores, mas que se revela um fracasso

quando se tenta aplicá-la a um novo problema. Dado o êxito obtido (aliás, com maior razão, por causa disso) tende-se a conservar a ideia já adquirida e comprovada e, apesar do fracasso, busca-se salvá-la; mas esse fato acaba sendo uma barreira para aprendizagens sucessivas.

Apresentaremos aqui dois tipos de obstáculos, os obstáculos epistemológicos e os didáticos. O primeiro foi apresentado pela primeira vez por Gastão Bachellard em 1938, segundo o Bachellard (1938) a noção de obstáculo epistemológico pode ser estudada no desenvolvimento histórico do pensamento científico e na prática da educação. Essa noção foi introduzida na Educação Matemática por Guy Brousseau em 1976, no CIAEM (Congresso Interamericano de Educação Matemática) (IGLIORI, 2015).

Bachellard apresenta uma distinção das funções do epistemólogo e do historiador das ciências. Enquanto o historiador considera as ideias como fatos, o segundo deve tomar os fatos como ideias, inserindo-as num sistema de pensamento. “Um fato mal interpretado por uma época permanece, para o historiador, um fato. Para o epistemólogo, é um obstáculo, um contra-pensamento” Bachellard (1996).

As ideias formalizadas no documento científico, não apresenta as dificuldades durante o percurso do pensamento. De acordo Pais (2011), no contexto matemático, apesar do registro formal, com demonstrações, não deixa explícito as dificuldades encontradas no percurso de criação do conhecimento. Mas, na fase inicial das ideias, não há um predomínio de linearidade, revelando os intensos conflitos de criação do saber. Assim, no espaço de aprendizagem não podemos negligenciar esta formulação de ideias e conseqüentemente os possíveis equívocos ou erros cometidos pelos estudantes.

A dificuldade na descoberta de um novo teorema, muitas vezes não é informada na redação final, nem mesmo o seu contexto histórico. Assim, esses percalços na construção do saber pode se apresentar durante o processo de aprendizagem de determinado saber matemático, isto é de interesse para a didática.

Vale destacar que, apesar da relevância, não temos intenção de apresentar detalhes sobre esse ponto, o que extrapolaria os limites deste trabalho, mas vale ressaltar da importância nas investigações em didática da matemática.

Os obstáculos epistemológicos de acordo Almouloud (2007) tem origem no saber e tem uma relação direta nas dificuldades que os matemáticos encontraram, durante a história, para compreensão de determinado conceito. Como por exemplo os paradoxos de Zenão de Eléia (450 a. C.) já citado anteriormente, obstáculos esses que na *transposição didática*<sup>19</sup> devem ser feitas escolhas tais que possam permitir aos estudantes construir o conceito,

---

<sup>19</sup> Transposição didática – segundo Chevallard (1991) um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática.

minimizando a chance de construir um obstáculo no estudo da teoria. Apesar de que, para Brousseau (1983) não se pode sem se deve fugir deste tipo de obstáculo.

Como obstáculos epistemológicos também podemos citar: O estatuto de números, como a aceitação dos números fracionários por Kronecker no fim do século XIX, rejeitando a fração como sendo um número. A não aceitação da irracionalidade de  $\sqrt{2}$  por Pitágoras, além da aceitação da existência dos números negativos por Carnot e Stendhal e em seguida dos números imaginários (ALMOULOU, 2007).

Dentro deste contexto, temos também a dificuldade em aceitar o zero como número, tendo uma associação como o “nada” e como origem. A questão posicional do sistema decimal, onde o zero ocupa uma importância imprescindível. E a noção de infinito, com uma dificuldade significativa, desde os paradoxos de Zenão como os paradoxos de Cantor e Russel.

Para entender o conceito de limites, é necessário também entender o conceito de variável. Segundo Pommer (2016), conceito este importante que nem sempre está relacionado diretamente ao conceito de funções, e pode aparecer como um entrave no desenvolvimento do conceito de limites, que se manifesta nos estudantes mediante erros, que são reproduzíveis e com alguma coerência interna para os alunos, sendo também persistentes e resistentes.

Segundo Iglori (2015),

As noções de números, de função, de limite, de infinito são noções que criaram obstáculos persistentes no processo de construção e continuam a criar no processo de aprendizagem, e, por essa razão, têm sido analisadas por diversos pesquisadores.

Temos ainda como obstáculo o conceito de função, de acordo Segadas (2016), pesquisas apontam, que apesar da definição formal de função estar sempre presente, a imagem que os alunos têm deste conceito nem sempre é adequada com a definição formal. Apesar dos estudantes enunciarem que “para cada valor de  $x$ , existe um único  $y$ ”, mas dito isto de forma mecânica, os alunos não conseguem transpor com exemplos, da mesma forma ao serem questionados sobre funções contínuas ou diferenciáveis (SEGADAS, 1998).

Além disso, podemos também citar o conceito de função, conceito essencial para o entendimento do limite de uma função, a percepção do estudante da expressão algébrica e o conjunto domínio. Como também um obstáculo geométrico sobre objetos geométricos e não sobre o número que os medem. E outros obstáculos lógicos, ligados a utilização de quantificadores, que geralmente são utilizados para formalização do conceito de limites.

Também temos os obstáculos didáticos, ligados a transposição didática. Tem origem na escolha de estratégias de ensino que permitem a construção, no instante da aprendizagem. Permitindo assim, o professor a entender melhor as possíveis causas do não sucesso dos estudantes.

Como fatores que podem contribuir para esse tipo de obstáculo, a Artigue (1990) *apud* Almouloud (2007) destaca: a generalização abusiva, muitas das operações que fazemos nos números naturais, os alunos transpõem para os números decimais e não observa as nuances. A

generalização formal abusiva, como em produtos notáveis os estudantes, recorrentemente apresentam erros como  $(a+b)^2 = a^2+b^2$ . A ideia de fixar uma contextualização, associar o modelo aditivo de operações com números inteiros a partir de jogos baseados em ganhos ou perdas, deixando de olhar para os números inteiros como um objeto matemático e abstrato, em que nem sempre as propriedades podem ser estudadas a partir de situações do dia-a-dia.

#### **4 – Considerações finais**

As dificuldades no ensino do cálculo, são expostos há décadas na literatura especializada. Apontamos a aprendizagem e a discussão dos obstáculos didáticos e epistemológicos o que tivemos a intenção apenas de provocar as discussões, pois não era a nossa pretensão exaurir o tema, mas fica assim a reflexão e a sugestão outras pesquisas sobre o tema, para que possa trazer contribuições mais aprofundadas.

Talvez, seja o desafio a ser enfrentado neste momento seja como incorporar, nas aulas de cálculo a utilização da história e filosofia. Nas situações abordadas neste trabalho, podemos observar os diversos obstáculos enfrentados pelos matemáticos ao longo de suas tentativas de conjecturar problemas tanto que envolvem o conceitos sobre o infinito, quanto sobre números reais e o zero.

Tanto a filosofia como a história mostram instrumentos capazes de mobilizar meios para um melhor entendimento das dificuldades que ocorrem na evolução do conhecimento que envolve o conceito de limites. Assim, verificar as causas e as dificuldades em na compreensão dos conceitos poderá ajudar o professor no trabalho com os estudantes.

Concluimos fazendo uma ressalva, caso os professores saibam melhor os aspectos históricos, filosóficos dos conceitos relacionados ao cálculo diferencial, poderá melhor compreender as dificuldades enfrentadas pelos estudantes e ajudá-los a superar.

#### **5 - Referências**

ALMOULOU, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba. Editora UFPR. 2007.

ALVARENGA, K. B.; SAMPAIO, M. M. Obstáculos referentes às relações de representação aritmética e algébrica de grandezas. In: FONSECA, L (Org.). **Didática do Cálculo: epistemologia, ensino e aprendizagem**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2016. p. 131-144.

ÁVILA, G.S. **Cálculo das funções de uma variável**. Ed. LTC. 7ª edição. Vol.1. Rio de Janeiro-RJ, 2003.

BACHELLARD, G. **A formação do espírito Científico**. São Paulo: Contra-ponto, 1996.

BOYER, C. B. **Cálculo: Tópicos da história da matemática para uso em sala de aula**; v. 6; São Paulo; Atual, 1992.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, v. 4, n. 2, p. 165-198. 1983.

CELESTINO, M.R. **Concepções sobre limite: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do Ensino Superior**. Tese de doutorado em educação matemática. PUC-SP. 2008.

D'AMORE, B. **Elementos da didática da matemática**. São Paulo. Editora Livraria da Física, 2007.

EVES, H. . **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Higyno Hugueiros Domingues. Campinas: Editora UNICAMP. 2004.

FARIAS, L.M.S.: PIRES, M.A.L.M. **As inter-relações entre Domínios Numérico, Algébrico e Geométrico e os Elementos da Didática Francesa**. Anais XVI Encontro Baiano de Educação Matemática, 2011.

FARIAS, L.M.S.: **Étude des interrelations entre les domaines numérique, algébrique et géométrique dans l'enseignement des mathématiques au secondaire: Une analyse des pratiques enseignantes en classes de troisième et de seconde**. Thèse de Doctorat, Université de Montpellier 2, France 2010.

GRANDE, A. L.; PIRES, R.F. Obstáculos referentes às relações numérica sob três enfoques: aritmético, algébrico e geométrico. In: FONSECA, L (Org.). **Didática do Cálculo: epistemologia, ensino e aprendizagem**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2016. p. 122-130.

CHEVALLARD, Y. **La Transposition Didactique**. Paris: La Pensée Sauvage, 1991.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 3ª edição. Belo Horizonte. Autêntica Editora, 2011.

POMMER, W. M. Obstáculos referentes ao desenvolvimento do conceito de variável. In: FONSECA, L (Org.). **Didática do Cálculo: epistemologia, ensino e aprendizagem**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2016. p. 99 – 111.

IGLIORI, S.B.C. A noção de obstáculo epistemológico e a educação matemática. In: MACHADO, S.D.A. (Org.). **Educação Matemática – uma (nova) introdução**. São Paulo: Ed. da PUC-SP, 2015. p.112-142.

SEGADAS, C.V. Obstáculos referentes ao desenvolvimento do conceito de funções. In: FONSECA, L (Org.). **Didática do Cálculo: epistemologia, ensino e aprendizagem**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2016. p. 112-121.

SEGADAS, C.V. **Students understanding of the fundamental theorem of calculus: an exploration of definitions, theorems and visual imagery**. Tese de doutorado. Instituto de Educação, Universidade de Londres, 1998.

SILVA, B.A.; PENTEADO, C.B. **Fundamentos dos números reais: concepções de professores e viabilidade de início do estudo da densidade no ensino médio**. Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, v.11, n.2, pp.351-371, 2009.